Пятнадцатая Летняя многопредметная школа Кировской области

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

6 класс

Вишкиль. 4-28.VII.99 г.

Вступительная олимпиада

1. Две ракеты вылетают навстречу друг другу из точек, находящихся на расстоянии 199919 км. Одна из них летит со скоростью 12000 км/ч, другая — со скоростью 18000 км/ч. На каком расстоянии они будут за минуту до встречи? Ответ объясните.

2. Число А положительно, В — отрицательно, С — равно нулю. Каков знак числа AB+AC+BC?

3. Лариса, Оксана, Слава и Петя собирали грибы. Оксана собрала больше всех, а Петя — меньше всех. Кто собрал больше грибов — мальчики или девочки?

4. Про некоторое число сделаны утверждения: 1) число делится на 2; 2) число делится на 6; 3) число делится на 12; 4) число делится на 48. Известно, что два из этих утверждений верны, а два — нет. Какие верны? Ответ обязательно объясните.

5. Можно ли разрезать прямоугольник размерами 78×55 см на прямоугольники 5×11 см?

6. Турист сходил на озеро, до которого 12 км, и вернулся обратно. Часть пути он шел со скоростью 3 км/ч, часть — по ровному месту со скоростью 4 км/ч, а часть — под гору со скоростью 5 км/ч. На весь путь без отдыха у него ушло 6 ч 16 мин. Сколько времени он шел по ровному месту?

Аналогия и обоснование

А. Задача о боксерах

1. Сколько боев нужно провести по олимпийской системе, чтобы выявить победителя, а) для 8 боксеров; б) для 16 боксеров?
2. Та же задача для 13 боксеров.
3. Определите, сколько боев потребуется, если в турнире участвует всего n боксеров.

Б. Задача о ящиках

1. Имеется один большой ящик. В нем лежат еще два меньших ящиках. В некоторых из них лежат еще по два ящика и т. д. Известно, что всего имеется 13 пустых ящиков. Найдите число заполненных.
2. Что общего у задачи о боксерах с задачей о ящиках?

В. Задача о хулигане и другие

1. Хулиган Петя порвал стенгазету. Каждый кусок он разрывал на 3 части. Когда попытались собрать стенгазету, то нашли 100 кусков. Докажите, что нашли не все обрывки.

2. Какое наименьшее число разрезов необходимо сделать, чтобы разрезать квадрат 40×40 на единичные квадратики?

3. У князя Гвидона было 2 сына. У 40 из его потомков было по 5 сыновей, а прочие умерли бездетными. Дочерей ни у одного из них не было. Сколько всего потомков было у князя Гвидона?

Эффект плюс-минус один

1. а) Каникулы начались 3 мая, а закончились 29 мая. Сколько дней длились каникулы?

   б) Отпуск начался 4 марта, а закончился 12 мая. Сколько дней длился отпуск?
2. Сколько всего есть двузначных чисел? А трехзначных?
3. Какие 500 идущих подряд натуральных чисел надо выписать, чтобы всего было выписано 1999 цифр?
4. У Пети сестер вдвое больше, чем братьев, а у его сестры братьев и сестер поровну. Сколько детей в этой семье?
5. Летели галки, стояли палки. Если на каждую палку по галке, то одной галке не хватит палки. Если на каждую палку сядет по 2 галки, то одна из палок останется без галок. Сколько палок и сколько галок?
6. Одним ударом силач Шварценеггер может разбить любой кусок бетона на три части. За сколько ударов он разобьет бетонную плиту на 27 частей?
7. 12-метровое бревно распилили на 3-х метровые чурбаки за 12 минут. За сколько такое бревно можно распилить на метровые чурбаки?
8. Лифт довозит на 5-й этаж за 1 минуту. За какое время он довезет до 20-го этажа?
9. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Получилось пять корок. Как это могло быть?
10. Улитка лезет на 10-метровый столб. За день она поднимается на 6 метров, а за ночь сползает на 5 метров. На какой день она доберется до вершины столба?
11. На каждой перемене Робин-Бобин-Барабек съедает по конфете. За неделю (с понедельника по субботу) было 30 уроков. Сколько всего конфет съел Робин?
12. Сколько раз минутная стрелка обгонит часовую в промежуток времени от одной секунды после полуночи до одной секунды до полудня?
13. После семи стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося куска?
14. Петя говорит: "Позавчера мне было 10 лет, а в следующем году мне исполнится тринадцать". Могут ли его слова быть правдой?

Геометрические конструкции

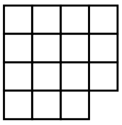


Рис. 1

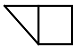


Рис. 3

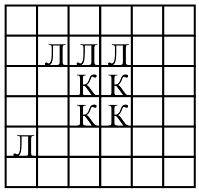


Рис. 4

1. Можно ли квадрат 4×4 без угловой клетки (см. рис. 1) разрезать на 3 равные части?
2. Можно ли уголок из трех клеток (см. рис. 2) разрезать на 4 равные части?
3. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 3, на 4 равные части.

4. Разрежьте флаг, изображенный на рисунке 4, по линиям сетки на 4 одинаковых вымпела так, чтобы в каждой из частей оказалось по льву и по короне (Л – лев, К – корона).

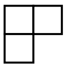


Рис. 2

5. Можно ли разрезать квадрат на 2000 равных треугольников?
6. Разрежьте квадрат на а) 6 б) 7 в) 8 меньших квадратов (не обязательно одинаковых).
7. Как посадить 9 деревьев так, чтобы получилось 10 прямых рядов по три дерева в каждом?

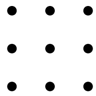


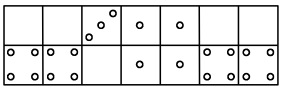
Рис. 5

Задачи для самостоятельного решения

8. Нарисуйте четырехзвенную ломаную, проходящую через 9 точек, расположенных в виде квадрата 3×3 (см. рис. 5).
9. Приведите пример карты, на которой четыре треугольные страны граничат каждая с каждой.
10. Из полоски бумаги 1×7 сложите единичный кубик.
11. Разбейте квадрат на треугольники так, чтобы каждый граничил ровно с тремя другими.

Разумно организованный перебор-1

1. В январе некоторого года было 4 понедельника и 4 пятницы. Каким днем недели могло быть 20-е число этого месяца?
2. В коробке лежат костяшки домино (см. рисунок). Как расположены кости?



3. В стране три города: Правдин, Лгунов и Переменск. Жители Правдина всегда говорят правду, Лгунова – лгут, а жители Переменска строго попеременно лгут и говорят правду. Пожарным позвонили: – У нас в городе пожар! – Где горит? – В Переменске. Пожарные уверены, что пожар есть. Куда им ехать?

4. Летела стая одноголовых сороконожек и трехголовых драконов. Вместе у них 648 ног и 39 голов. Сколько ног у дракона?
5. Из четырех деталей одна отличается по весу от остальных, имеющих одинаковый вес. Как выделить ее двумя взвешиваниями на весах с двумя чашками без гирь?
6. Расшифруйте ребусы (одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные – разные):
   а) Б + БЕЕЕ = МУУУ
7. б) СИНИЦА+СИНИЦА=ПТИЧКИ
8. Расставить числа 1,2,3,4,5,6,7,8,9 в таблицу 3×3 так, чтобы сумы чисел в любом ряду из трех клеток (по вертикали, горизонтали или диагонали) были одинаковы.

Для самостоятельного решения

1. Решите ребусы
   а) КНИГА+КНИГА+КНИГА=НАУКА
   б) АИСТ+АИСТ+АИСТ+АИСТ+АИСТ=СТАЯ
2. По длинному узкому каналу один за другим идут три парохода. Навстречу им – еще 3 парохода. Канал такой узкий, что два парохода в нем разъехаться не могут, но в нем есть залив, где может поместиться один пароход. Как им разъехаться?
3. Как 3 рыцаря, каждый со своим оруженосцем, могут переправиться через реку на двуместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев.
4. Есть три сосуда 3 л, 4 л и 5 л без делений, кран с водой, раковина и 3 л сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли с помощью переливаний получить 6 л смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде воды и сиропа было поровну?
5. Первая слева цифра десятизначного числа равна числу единиц в записи этого числа, вторая – числу двоек, третья – числу троек, четвертая – числу четверок, …, девятая – числу девяток, десятая – числу нулей. Найдите это число.
6. Поставьте вместо многоточий числа, чтобы получилось истинное высказывание:
   В этом предложении цифра 0 встречается … раз, цифра 1 – … раз, 2 – … раз, 3 – … раз, 4 – … раз, 5 – … раз, 6 – … раз, 7 – … раз, 8 – … раз, 9 – … раз.

Разумно организованный перебор-2

1. В кабине лифта 20-этажного дома есть две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей, при нажатии на другую – опускается на 8 этажей. Как попасть с 13 этажа на 8-й?
2. Каким образом можно набрать из реки ровно 6 литров воды, если имеются два ведра – одно емкостью 4 л, другое – 9 л?

3. Из полного восьмилитрового ведра перелить 4 литра керосина в пятилитровый бидон с помощью трехлитровой банки.
4. Крестьянин с волком, козой и мешком капусты подошел к реке. Ему надо переправиться на другой берег, однако в лодке вместе с ним может поместиться либо волк, либо коза, либо капуста. Оставшись на берегу без крестьянина, волк съест козу, а коза – капусту. Как крестьянину переправиться без потерь?
5. Тетрамино – это многоугольник, вырезанный из клетчатой бумаги и состоящий из 4 целых клеток, а пентамино – из 5 клеток. Сколько существует различных а) тетрамино, б) пентамино?
6. а) Расставьте на шахматной доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга.

   б) Найдите как можно больше таких расстановок, которые не переводятся друг в друга поворотами и симметрией.

Круги Эйлера

1. В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11- в биологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекается математикой?
2. В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой занимаются 15 человек, биологией – 20, а математикой и биологией – 10?
3. В пионерском лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?
4. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 3? На 5? На 15? Не делится ни на 3, ни на 5?
5. Ученики 6 класса решали две задачи. В конце занятия учитель составил четыре списка: I – решивших первую задачу, II – решивших только одну задачу, III – решивших по меньшей мере одну задачу, IV – решивших обе задачи. Какой из списков самый длинный? Могут ли два списка совпадать по составу? Если да, то какие?

Для самостоятельного решения

6. В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 – в хоккей, 18 – в волейбол. Увлекаются двумя видами спорта – баскетболом и хоккеем – четверо, баскетболом и волейболом – трое, волейболом и хоккеем – пятеро. Трое не увлекаются ни волейболом, ни баскетболом, ни хоккеем.

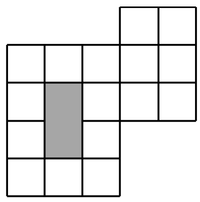
   а) Сколько ребят увлекаются одновременно тремя видами спорта?

   б) Сколько ребят увлекаются лишь одним из этих видов спорта?
7. На прогулку пошли шестиклассники и семиклассники. Все они были либо босиком, либо в тапочках. Шестиклассников было 24, а босых учеников 16.

Обутых шестиклассников было столько же, сколько босых семиклассников. Сколько учеников ходили на прогулку?

Внутренний матбой-1

1. Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком. Андрей выпил четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько человек в семье? (Все чашки одинакового объема).
2. Решить ребус: ДЕТАЛЬ+ДЕТАЛЬ=ИЗДЕЛИЕ.
3. Когда школьники мылись в бане, Павел обнаружил, что из горячего крана тазик наполняется за 1 минуту и 9 секунд, а из холодного – за 1 минуту без 9 секунд. Сперва Павел пустил горячую воду. Через сколько секунд он должен открыть еще и холодную, чтобы к моменту наполнения в тазик налилось холодной воды в полтора раза меньше, чем горячей?
4. На прямой дороге от Кощеево до Горынычей поставили километровые столбы и прибили на каждый по две таблички: сколько километров до Кощеево и сколько – до Горынычей. Василиса Премудрая заметила, что сумма всех цифр на каждом столбе равна 15. Сколько километров от Кощеево до Горынычей?
5. В Эрмитаже две лестницы. Высота первой 13м, а ее длина (по горизонтали) – 20м; у второй соответственно 11м и 22м. Обе лестницы покрыты ковровыми дорожками. Какая из дорожек длиннее, если на первой лестнице ступенек вдвое меньше, чем на второй?
6. Сегодня, 8 июля 1999 года, на столовой висит табличка: "До 200-летия К.А.Кнопа остался 60001 день". Если так, то когда же родился К.А.Кноп?
7. Существует ли 10 натуральных чисел (не обязательно различных), сумма которых равна их произведению?
8. Разрежьте фигуру из 16 клеток, изображенную на рисунке справа, на две части, из которых можно сложить квадрат.



Можно или нельзя (конструкции и противоречия)

1. Может ли в месяце быть а) 3 б) 4 в) 5 г) 6 воскресений?
2. Может ли сумма цифр 3-значного числа быть равна а)22 б)28?
3. Может ли произведение цифр трехзначного числа быть равно а)22 б)28?
4. Можно ли, не оторвав карандаш от бумаги и не проведя никакой линии более одного раза, нарисовать открытый конверт (см. рис. 1)? А закрытый (см. рис. 2)?

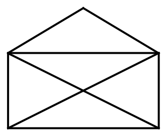


рис. 1

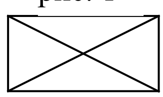


рис. 2

5. Можно ли в прямоугольную таблицу поставить числа так, чтобы
   а) в каждом столбце сумма была положительна, а в каждой строке – отрицательна;
   б) в каждом столбце сумма была больше 10, а в каждой строке – меньше 10.

6. Можно ли на шахматной доске расставить а) 9 ладей; б) 14 слонов так, чтобы они не били друг друга?

Для самостоятельного решения

1. У шахматной доски выпилены а) угловая клетка; б) две противоположные угловые клетки; в) две клетки разного цвета. Можно ли такую испорченную доску распилить на двуклеточные прямоугольники?
2. Из 10 одинаковых с виду монет – одна фальшивая (легче настоящей). Можно ли наверняка найти ее за два взвешивания на чашечных весах без гирь?
3. На сковороде могут одновременно жариться 2 котлеты. Каждую надо обжарить с обеих сторон, причём для обжаривания одной стороны требуются 2 минуты. Можно ли поджарить 3 котлеты меньше чем за 7 минут?
4. В магазин привезли платья трех цветов и трех фасонов. Всегда ли можно выбрать для витрины 3 платья, чтобы были представлены все цвета и все фасоны?

Повторяемость и симметрия

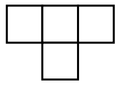


рис. 1

1. Как составить квадрат из 100 тетрамино в виде буквы "Т" (см. рис. 1)?

2. Сколькими способами можно совместить сам с собой а) прямоугольник; б) квадрат; в) равнобедренный прямоугольный треугольник ; г) круг?

3. Разрежьте квадрат на а) два равных шестиугольника; б) два равных пятиугольника; в) четыре равных восьмиугольника.

4. Как известно, в задаче про волка, козу и капусту есть способ переправиться без потерь. Докажите, что таких способов по крайней мере два.

5. Есть две клетчатых шоколадки 5×7. Двое по очереди разламывают шоколадку или любой из ранее отломанных кусков на два меньших по границам клеток. Если образуются один или несколько одноклеточных кусков, отломивший их съедает. Докажите, что второй может съесть не меньше первого.

6. Турист хочет дойти от палатки до костра, набрав по дороге в речке ведро воды. Считая положения палатки и костра заданными, а берег реки прямым, придумайте, как ему идти, чтобы путь был самым коротким.

Для самостоятельного решения

7. Можно ли разрезать квадрат на 1000 меньших квадратов (не обязательно одинаковых)?

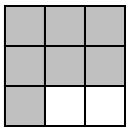
8. Двое по очереди ставят шахматных слонов в клетки доски 8×8 так, чтобы слоны не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть независимо от игры противника, и как ему при этом нужно играть?

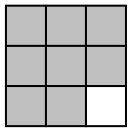
9. Билеты нумеруются от 000000 до 999999. Номер называется счастливым, если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр. Докажите, что сумма всех счастливых номеров делится а)на 1001; б) на 999.

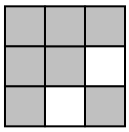
Головоломка «Квадрат»

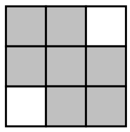
Инструкция по применению

I. Сверните квадрат 4×4 так, чтобы получился квадрат 3×3 со следующим расположением темных и светлых клеточек:

1. 

2. 

3. 

4. 

II. Придумайте свои задачки с этим квадратом, и задайте их своим товарищам.

Конструкции на много-мало

Что не запрещено, то разрешено!

0. На одну чашку весов кладется пять десятикопеечных монет, а на другую – равная по массе пачка стодолларовых купюр. Будут ли весы в равновесии?

1. Может ли и сумма, и произведение нескольких натуральных чисел быть равными 99?

2. Площадь прямоугольника меньше 1 кв.дм. Может ли его периметр быть больше 1 км?

3. На балу было юношей и девушек поровну, было 10 танцев и каждый раз танцевали все.

а) Как могло получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал либо с более красивой, либо с более умной девушкой?

б) Как могло получиться, что в дополнение к тому в каждом танце (начиная со второго) был юноша, который танцевал и с более красивой, и с более умной девушкой?

4. Сумма положительных чисел больше 10. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?

5. Раз в месяц директор фирмы предлагает трем своим заместителям проголосовать за новый список своей и их зарплат. Сам директор не голосует. Те заместители, чью зарплату предлагается увеличить, голосуют за, остальные – против. Предложение принимается большинством голосов. Может ли директор за год добиться, чтобы его зарплата вдесятеро увеличилась, а зарплаты всех заместителей вдесятеро уменьшились?

6. На занятии Вася, Леня и Стас решили все задачи. Может ли оказаться, что Стас большинство задач решил раньше Лени, Леня – большинство раньше Васи, а Вася – большинство раньше Стаса?

7. Фирма проработала полгода, подсчитывая свою прибыль каждый месяц. Каждые два подряд идущих месяца суммарная прибыль была отрицательной. а) Может ли суммарная прибыль за все полгода быть положительной? б) А за первые 5 месяцев?

Для самостоятельного решения

8. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов а) с суммой периметров 100 б) с суммой площадей 100?

9. В однокруговом футбольном турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. «Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

10. Прорежьте в тетрадном листке дыру, в которую может пролезть Вячеслав Александрович.

11. В припортовой таверне пираты Боб и Иван состязались в изготовлении и употреблении крепких напитков. Боб изготовил коктейль из рома и виски, а Иван смешал водку с портвейном. Известно, что ром крепче водки, а виски крепче портвейна. Может ли смесь Ивана оказаться крепче коктейля Боба? (Примечание для непьющих: крепость – это процент спирта в смеси.)

Четность

1. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 19995?
2. Можно ли разменять 25 тугриков десятью купюрами достоинством в 1, 3 и 5 тугриков?
3. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция закричала "Это обман!". Почему?
4. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей разного пола четно.
5. Докажите, что общее число участников ЛМШ99, совершивших с другими участниками нечетное число рукопожатий, четно.
6. На шахматной доске стоят 11 шашек, расположенных симметрично относительно большой диагонали. Докажите, что есть шашка или шашки и на большой диагонали.
7. а) На столе лежит 21 монета решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть любые 20 монет. Можно ли за несколько операций добиться, чтобы все монеты легли орлом вверх? б) Тот же вопрос, если монет 20, а разрешается переворачивать по 19.

8. Состоялось заседание руководителей 15 республик бывшего Советского Союза. Резидент одной из разведок сообщил, что каждый руководитель заключил тайное соглашение ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?
9. В клетчатом квадрате, разрезая по границам клеток, прорезали квадратную дырку поменьше. Может ли оставшаяся фигура состоять ровно из 250 клеток?
10. Докажите, что число способов расставить на доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга – четно.

Анализ с конца

Бывает, что задом наперед ходить удобнее…
Рак

1. За булочками к вечернему чаю выстроилась очередь. Булочки задерживались, и в каждый промежуток между стоящими успело влезть по человеку. Булочки все еще не начали выдавать, и во все промежутки опять влезло по человеку. Тут наконец принесли 85 булочек, и всем стоящим досталось по одной. Сколько человек стояли в очереди первоначально?

2. В колбу пустили бактерию. Каждую минуту число бактерий удваивается. Через три часа колба заполнилась бактериями. В какой момент бактериями была заполнена четверть колбы?

3. Предложил черт лодырю: "Всякий раз, как перейдешь этот волшебный мост, твои деньги удвоятся. За это ты, перейдя мост, должен будешь отдать мне 40 рублей." Трижды перешел лодырь мост – и остался совсем без денег. Сколько денег было у лодыря первоначально?

4. Трем братьям дали 24 бублика так, что каждый получил на три бублика меньше, чем ему лет. Меньший брат был сообразительный и предложил поменять часть бубликов: “Я,– сказал он,– оставлю половину бубликов, а другую разделю между вами поровну; после этого средний брат также оставит половину бубликов, а другую разделит поровну между мной и старшим братом. В конце старший брат поделит так же”. Так они и сделали. Оказалось, что все получили поровну. Сколько лет каждому брату?

5. Над озерами летели гуси. На каждом садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на 7 озерах. Сколько было гусей?

6. Учитель раздавал школьникам открытки. Первому он дал одну открытку и одну десятую оставшихся. Второму он дал две открытки и одну десятую оставшихся и т. д. Девятому он дал девять открыток и одну десятую оставшихся. Оказалось, что все получили поровну и все открытки были розданы. Сколько всего было открыток?

Для самостоятельного решения

7. 5 человек сидят за круглым столом. У первого есть 81 яблоко, у остальных – разное количество. Вначале первый дает каждому из остальных столько яблок, сколько у того уже есть. После этого остальные делают то же самое. Когда они закончили, яблок у всех стало поровну. Сколько яблок было у каждого вначале?

8. Решить уравнение

$$1+2:(1+32:(1+1024:(1+32:(1+2:(1+2:(1+2:(1+2:x)))))))=1987.$$

9. Можно ли, взявшись двумя руками за концы веревки и не отпуская их, завязать на ней узел?

10. * За столом сидят 7 гномов, перед каждым – кружка, в некоторые налит эль (но, быть может, не поровну). Первый разлил весь свой эль поровну в кружки всем остальным. Затем второй разлил свой эль поровну всем остальным (включая первого), затем третий гном и т.д. до седьмого. Когда и седьмой гном разлил свой эль, у всех оказалось столько же эля, сколько было вначале. Сколько эля в каждой кружке, если всего его 3 литра?

Принцип Дирихле

1. В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.
2. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежали яблоки одного сорта. Найдутся ли 9 ящиков одного сорта?
3. Докажите, что среди любых 11 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 10.
4. Можно ли расставить на шахматной доске 17 королей так, чтобы они не били друг друга?
5. Пятнадцать мальчиков собрали вместе сто орехов. Докажите, что какие-то двое из них собрали одинаковое количество орехов.
6. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу.
7. Докажите, что в любой момент однокругового чемпионата найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Для самостоятельного решения

8. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать коврик размера 1×1 метр, в котором нет ни одной дырки.
9. Докажите, что среди любых 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
10. На шахматной доске стоит 31 фишка. Докажите, что найдется свободный уголок из трех клеток.

Самостоятельная работа №1

1. В классе из 25 учеников 12 человек умеют читать, 8 – считать, 9 – писать, 4 – читать и писать, 5 – читать и считать, 3 – писать и считать, 2 – читать, писать и считать. Сколько учеников ничего не умеют?
2. Можно ли при помощи двух бидонов емкостью 15 и 16 литров отмерить 8 литров воды?
3. Разрежьте квадрат со стороной 4 см на прямоугольники, сумма периметров которых равна 25 см.
4. Шестиклассник Петя написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причем одинаковые цифры – на одинаковые буквы, а разные – на разные. В итоге у него получилось $АБ\cdot ВГ=ДДЕЕ$. Докажите, что он где-то ошибся.
5. Двое по очереди ставят шахматных слонов в клетки доски 8×8 так, чтобы слоны не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть независимо от игры противника, и как ему при этом нужно играть?
6. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в один из 4 цветов, причем в каждом квадратике 2×2 встречаются все 4 цвета. Докажите, что углы квадрата имеют различные цвета.

Постепенное конструирование

Если забор не удается перепрыгнуть,
попробуйте через него перелезть…

1. а) Придумайте 3 различных натуральных числа, чтобы каждое делило сумму остальных; б) то же, но все числа больше 100; в) как в (а), но 4 числа; г) как в (а), но 10 чисел.

2. Разрежьте квадрат на n меньших квадратов (не обязательно одинаковых) а) n=4; б) n=7; в) n=10; г) n=1999.

3. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы без гирь, отмерить 9 кг гвоздей?

4. Давным-давно в СССР имелись в обращении 3-копеечные и 5-копечные монеты. Докажите, что можно было набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

5. Представьте число 1 в виде суммы а) трех б) четырех в) десяти различных дробей с числителем 1.

6. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

Для самостоятельного решения

7. При каких натуральных *n* можно разрезать квадрат на *n* меньших квадратов (не обязательно одинаковых)?

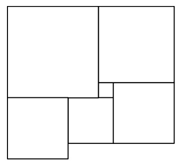
8. Расставьте различные натуральные числа в таблицу 2×3 (2 строки, 3 столбца) так, чтобы произведения в столбцах были равны, и суммы в строках тоже были равны (но суммы могут отличаться от произведений).

9. а) Может ли свеча внутри пустой многоугольной комнаты не освещать полностью ни одну из стен? б) Существует ли многоугольник и точка вне него, из которой ни одной стороны не видно полностью?

10. У входа в пещеру с сокровищами стоит бочка с 4 дырками по кругу в крышке. В каждой дырке можно нащупать селедку хвостом вверх или вниз. Али-Баба может просунуть руки в любые две дырки, определить положение селедок под ними и, если хочет, перевернуть одну или обе по своему усмотрению. Когда хвосты всех четырех селедок окажутся направленными в одну сторону, дверь в пещеру откроется. Однако, после того, как Али-Баба вытаскивает руки, бочка некоторое время с дикой скоростью крутится, так что Али-Баба не может определить, куда именно он совал руки раньше. Как Али-Бабе открыть дверь не более чем за 10 засовываний?

Внутренний матбой-2

1. В числе переставили цифры так, что получилось число, в три раза меньшее. Докажите, что исходное число делилось на 27.
2. Какое наибольшее число прямоугольников 1×5 можно вырезать из квадрата 8×8 ?
3. В коробке есть карандаши разной длины, и есть карандаши разного цвета. Всегда ли среди них найдутся два карандаша, отличающиеся и по цвету, и по длине?
4. Трех способных девочек из ЛМШ – Аню, Ларису и Наташу – усадили в ряд так, что Аня видит Ларису и Наташу, Лариса видит только Наташу, а Наташа никого не видит. Затем им показали 5 бантиков – 3 красных и 2 белых, завязали глаза и прицепили каждой на голову один из бантиков. Затем глаза им развязали и каждую спросили, может ли она определить цвет своего бантика. После того, как Аня, а затем и Лариса ответили, что не могут, Наташа поняла, какого цвета на ней бантик. Какой же?



5. Фигура на рисунке справа составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна 1.
6. Некоторые клетки таблицы 7×7 отмечены крестиками. Докажите, что суммарное количество строк и столбцов с нечетным числом крестиков – четно.
7. У ромашки 12 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков может всегда выигрывать независимо от игры противника?
8. Расставьте на ребрах куба числа 1, 2, 3, …, 12 так, чтобы на всех шести гранях суммы чисел были равны.

Делимость

1. Можно ли монетами в 14 и 35 шиллингов заплатить без сдачи сумму в 1999 шиллингов?
2. Можно ли прямоугольник со сторонами $2{,}3\times3{,}5$ см разрезать на прямоугольнички $0{,}08\times0{,}07$ см?
3. Дети, построенные парами, возвращаются с вечернего чая с пряниками в карманах. В каждой паре у одного пряников вдвое больше, чем у другого. Может ли они у всех вместе быть ровно 1000 пряников?
4. В банк можно положить за один раз 120 руб. или снять 300 руб. На счету есть 1000 руб., а других денег нет. Какую наибольшую сумму можно снять за несколько раз?
5. Может ли наименьшее общее кратное двух чисел равняться их сумме?
6. Количество натуральных делителей некоторого числа нечетно. Докажите, что это число – полный квадрат.

Для самостоятельного решения

7. На Луне ходят монеты достоинствами только в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил на сдачу на одну монету больше. Какую наименьшую сумму могла стоить покупка?
8. Представьте какое-нибудь число в виде суммы семи его различных делителей.
9. Может ли наименьшее общее кратное трех чисел равняться их сумме?
10. У царя Дадона в одиночных камерах сидели 100 пленников. Поворот ручки отпирает каждую камеру, следующий поворот запирает, еще один снова отпирает и т.д. К празднику царь решил освободить часть пленников и накануне послал слугу, который повернул ручку на дверях каждой камеры. Все двери оказались отперты. Но тут пришел второй посыльный и повернул ручку каждой второй камеры. Двери 2-й, 4-й, 6-й,…камер вновь оказались заперты. Следующий посланец повернул ручки 3-й, 6-й, 9-й, 12-й и т.д. камер. Еще один – в каждой четвертой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ручку сотой камеры. Наконец наступил праздник, и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу. Сколько пленников освободил Дадон?

Пример+оценка

1. Электронные часы показывают цифры часов и минут (например 13:10). Какая наибольшая сумма цифр может быть на таких часах?
2. Какое наибольшее число трехклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?
3. Каким наименьшим количеством монет в 3 и 5 коп можно набрать сумму 37 копеек?
4. Какое наименьшее число ладей могут побить всю доску?

5. Найдите наименьшее возможное число членов кружка, если известно, что девочек в нем меньше 50%, но больше 40%?
6. В вишкильскую столовую надо доставить несколько бочек с апельсинами общей массой 10 т. Каждая бочка весит не более 1 т. Какого наименьшего количества трехтонок для этого заведомо хватит?

Для самостоятельного решения

7. Какое наибольшее количество коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?
8. Четыре кузнеца должны подковать пять лошадей. Какое наименьшее время они могут затратить на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову пять минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)
9. Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички (каждая спичка составляет ровно одну сторону клетки). Какое наименьшее количество спичек необходимо убрать, чтобы ладья могла добраться с любого поля на любое, не перепрыгивая через спички?
10.* На зачете 10 школьникам надели на голову шапочки красного или белого цвета и построили их в колонну так, чтобы каждый мог видеть цвет шапочек только у впереди стоящих. Дальше их начинают спрашивать о цвете шапочки, начиная с заднего (который видит всех, кроме себя) по порядку. Если угадал цвет своей шапочки, то сдал зачет, а если нет, то нет. Школьники знали об испытании и могли заранее договориться, как понимать чужие ответы (например, школьник мог посчитать сколько белых и сколько красных шапочку он видит, и назвать цвет, которого меньше). Какое наибольшее число школьников может наверняка сдать зачет?

Двумя способами

1. а) Можно ли расставить числа в таблице 6×9 так, чтобы в каждом столбце была сумма по 10, а в каждой строке – по 20?
2. б) В прямоугольной таблице 8 столбцов, сумма в каждом столбце – по 10, а в каждой строке – по 20. Сколько в таблице строк?
3. Средний возраст 11 игроков футбольной команды – 22 года. Во время матча один игрок получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся – 21 год. Сколько лет получившему травму?
4. В строку записаны n чисел, причем суммы любых трех подряд равна 7, а сумма всех равна 20. а) Может ли n равняться 12? б) n равно 10. Найдите седьмое число.
5. В однокруговом турнире участвовали 15 шахматистов. Могло ли оказаться, что каждый из них ровно 5 раз сыграл вничью?
6. Четыре девочки – Катя, Лена, Маша и Нина – участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен – больше, чем каждая из остальных, а Лена – 5 песен – меньше, чем каждая из остальных девочек. Сколько песен было спето?

7. Иван с сыном и Степан с сыном были на рыбалке. Иван и его сын поймали рыб поровну, а Степан – втрое больше своего сына. Всего поймали 25 рыб. Сколько рыб поймал Иван?

Для самостоятельного решения

8. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3,8. Длина стороны AB – 0,6. Найти длину стороны BC, если известно, что она выражается целым числом.
9. Две команды разыграли первенство отряда по десятиборью, причем за победу в каждом из видов команда получала 4 очка, за ничью – 2 очка и за проигрыш – 1 очко. Вместе обе команды набрали 46 очков. Сколько было ничьих?
10. У царя Гороха I было три сына. Каждый из его потомков либо умер во младенчестве, либо правил государством и также имел трех сыновей. Известно, что последним правителем был Горох XVII. Сколько потомков царя Гороха умерло во младенчестве?
11. В классе, где я учился, каждый мальчик дружил с тремя девочками, а каждая девочка - с двумя мальчиками. При этом в классе был 31 пионер и стояло 19 парт. Сколько учеников было в моем классе?
12. Первый разбойник взял 100 рублей и 20-ю часть оставшейся добычи, второй взял 200 рублей и 20-ю часть остатка, третий – 300 рублей и 20-ю часть остатка, и так далее. Оказалось, что добычу поделили поровну. Сколько разбойников и какова добыча?

Комбинаторика: правило умножения

1. а) У скольких двухзначных чисел все цифры четные? б) А у скольких трехзначных?
2. Сколько диагоналей в выпуклом 10-угольнике?
3. Комбинация из трех букв на автомобильном номере состоит только из тех русских букв, у которых есть похожие латинские, а именно из А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х. Сколько всего таких комбинаций?
4. Сколькими способами в команде из 8 человек можно выбрать а) капитана и заместителя; б) двоих дежурных?
5. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?
6. а) У скольких двухзначных чисел все цифры разные? б) А у скольких трехзначных? в) А у скольких 11-значных?
7. На окружности отмечены 5 красных и 7 синих точек. Рассмотрим всевозможные отрезки (хорды) с концами в отмеченных точках. У скольких отрезков концы а) разного цвета; б) одинакового цвета?
8. В обычном домино на половинках доминошек бывает от 0 до 6 точек. Всего в комплекте 28 доминошек. А сколько доминошек будет в комплекте, где на половинке возможно от 0 до 13 точек?

Для самостоятельного решения

9. Сколькими способами можно разменять 50 руб монетами в 1 и 2 руб?
10. Сколькими способами можно поставить на доску черного и белого королей так, чтобы они не били друг друга?
11. Билеты нумеруются от 000000 до 999999. У скольких из них сумма первых трех и сумма последних трех цифр равна 15?

Признаки делимости

Вопросы для вспоминания и самопроверки

1. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25, 50, 100.

2. Почему верны признаки "Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2" и "Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 5" и не верны аналогичные признаки для других однозначных чисел?

3. Почему верен признак "Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное двумя его последним цифрами делится на 4"? Сформулируйте аналогичные признаки делимости для чисел 25 и 50. Что общего у этих чисел с числом 4?

4. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 8 и 125.

5. Сформулируйте признаки делимости на 3 и на 9. Почему всякое число вида 10…0 при делении на 9 дает в остатке 1? Верны ли аналогичные признаки для других однозначных чисел?

6. Какой остаток от деления на 9 дает число вида A0…0? Докажите, что число и его сумма цифр дают при делении на 9 одинаковые остатки. Докажите, что то же верно при делении на 3.

7. Как проверить, делится ли число на а) 6 б) 12 в) 15 г) 18 д) 30 е) 45 ж) 75 з) 225?

8. Поставим перед каждой цифрой числа знаки плюс и минус по очереди начиная с плюса перед последней цифрой и идя справа налево. Назовем результат **знакопеременной суммой цифр** числа. Например, для числа 1999 это $-1+9-9+9=8$.

Докажите, что знакопеременная сумма цифр четырехзначного числа может принимать все целые значения от -18 до $+17$.

9. Докажите, что число делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр делится на 11. Какой остаток дает при делении на 11 число вида 10…0, если у него а) четное б) нечетное число нулей?

10. Попробуйте сформулировать признаки делимости на 99 и 101.

Для самостоятельного решения

11. Из двузначного числа вычли число, получающееся из него же перестановкой цифр. Докажите, что результат делится на 9.

12. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 120 раз. Докажите, что в результате получился нуль.

13. Шестиклассник Петя перемножил все числа от 1 до 1998. У полученного числа он посчитал сумму цифр, затем посчитал сумму цифр результата, и так далее, пока не получил число, состоящее из одной цифры. Какое?

14. Натуральное число возвели в квадрат. Может ли результат оканчиваться на 66?

15. Докажите, что число, записываемое 27 единицами, делится на 27.

16. В десятизначном числе все цифры встречаются по разу. Можно ли оно делиться на 11?

Количество информации

1. а) Есть 17 карт. Зритель загадывает одну из них. Фокусник раскладывает все карты на 4 стопки и узнает у зрителя, в какой стопке оказалась задуманная карта. Докажите, что он всегда может определить задуманную карту за 3 вопроса, а двух вопросов может и не хватить. б) При каком наибольшем количестве карт можно наверняка определить задуманную карту за 3 вопроса?
2. а) Среди 10 монет есть ровно одна фальшивая (легче остальных). За какое наименьшее число на чашечных весах без гирь ее можно наверняка выявить? б)* Среди 5 монет – ровно одна фальшивая: она отличается по весу от остальных, но неизвестно – легче или тяжелее. Требуется выявить ее на чашечных весах без гирь и узнать, легче она или тяжелее настоящей. Какое наименьшее число взвешиваний для этого наверняка хватит?
3. а) В выпуклом пятиугольнике проведены все стороны и диагонали. Я загадал одну из этих отрезков. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка угадать его при игре в "Данетки"?
4. б) Я загадал две вершины выпуклого пятиугольника. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка угадать их обе при игре в "Данетки"?
5. в) Я загадал двоих из 7 присутствующих. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка угадать обоих при игре в "Данетки"?
6. а) Каким наименьшим числом гирь можно набрать все веса 1г, 2г, 3г, …, 31г? (гири можно класть только на одну чашку весов)
7. б) Какое наименьшее число гирь должно быть в наборе, чтобы с его помощью можно было отвесить на чашечных весах веса 1г, 2г,…,13г ? (Гири можно класть на обе чашки весов)
8. Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть два кокосовых ореха. За какое наименьшее число бросков обезьяна может удовлетворить свое любопытство? (Не разбившийся орех можно бросать снова)

9. Я задумал целое число от 1 до 3. Вы можете задать мне один вопрос, на который я честно должен ответить "Да", "Нет" или "Не знаю", после чего вы должны наверняка отгадать задуманное число. Придумайте такой вопрос.
10. Я задумал три натуральных числа меньше 100. Вы можете попросить умножить первое из них на какое-то ваше число, второе – на какое-то другое ваше число, третье – на какое-то еще ваше число, затем попросить меня сложить эти три произведения и сообщить вам результат. Можете ли вы действовать так, чтобы по этому результату наверняка отгадать все три задуманные числа?
11. а) В гостиницу приехал путешественник. У него вместо денег нашлась лишь серебряная цепочка из 7 звеньев. Хозяин требует платить по одному звену в день без задержек, готов давать сдачу ранее полученными кусками цепочки, но плату вперед брать отказывается. Какое наименьшее число звеньев придется распилить, чтобы можно расплачиваться все 7 дней? б) То же с 23 звеньями и 23 днями.

Части и проценты

1. Делимое в 6 раз больше делителя, а делитель в 6 раз больше частного. Найдите делимое.
2. Числитель дроби увеличили на 100, а знаменатель – на 1. Могла ли дробь стать меньше?
3. Известно, что среди философов каждый седьмой – математик, а среди математиков каждый пятый – философ. Кого больше – философов или математиков?
4. Предприятие получило задание за два года снизить на 51% объем выпускаемой продукции. Каждый год требуют снижать на одно и то же число процентов. На сколько?
5. Семеро братьев решили поделить верблюдов. Первый взял себе 1/7 часть стада, второй – 1/6 от оставшегося, третий – 1/5 остатка, четвертый – 1/4 остатка, пятый – 1/3 остатка, шестой – половину, и последний взял оставшихся двух верблюдов. Сколько верблюдов было в стаде?
6. У одного араба был кувшин молока, у другого – хлеб, у третьего – 6 фиников. За обед третий араб заплатил остальным 20 монет. Как следует разделить эти деньги, если ели поровну, 4 кувшина молока стоят столько же, сколько три 3 хлеба, а один кувшин молока равноценен 36 финикам?
7. М.В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той денежки хотя бы на квас, если цены еще раз вырастут на 20%?
8. Леспромхоз захотел вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил. Он сказал: «99% деревьев в лесу – сосны. Мы будем рубить только их, так, что после вырубки их станет 98%». Какую часть деревьев хочет вырубить леспромхоз?

9. В отряд пришло 10 новобранцев. Мог ли процент новобранцев увеличиться ровно вдвое?
10. Было два одинаковых стакана, в одном – 200 мл молока, в другом – столько же кофе. Из стакана с молоком перелили 1 чайную ложку (10 мл) молока в кофе, смесь тщательно перемешали, затем перелили такую же чайную ложку смеси обратно в молоко, и снова перемешали. Что больше: процент кофе в молоке, или процент молока в кофе?
11. Произведение нескольких положительных дробей равно 7. Все числители и знаменатели увеличили на 1. Могло ли произведение увеличиться?
12. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

Самостоятельная работа-2

1. На числовой оси отмечены несколько чисел. Два из них сдвинули влево на 2, а остальные – вправо на 5. В результате сумма чисел увеличилась на 31. Сколько всего чисел было отмечено до сдвига?
2. Велосипедное управление запретило включать цифру 8 в 3-разрядные велосипедные номера. Хватит ли номеров на 720 велосипедистов?
3. Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 1999 и делится на 11.
4. Вначале на экране компьютера было число 1. Каждую секунду оно увеличивается на свою сумму цифр. Появится ли в какой-то момент на экране число 1996?
5. В коробке лежит 82 карандаша. Докажите, что среди них можно выбрать 10 одного цвета либо 10 разного.
6. Может ли наименьшее общее кратное четырех натуральных чисел равняться их сумме?

Комбинаторика и кодировка

1. В детский сад привезли кубики, красные и синие. Каждому из 100 детей выдали по 3 кубика, и каждый ребенок построил из своих кубиков башню. Какое наибольшее число различно раскрашенных башен могло получиться? А если выдали по 4 кубика? По 5? По 6? По 7?

2. Сигнальное устройство состоит из пяти одноцветных лампочек, расположенных в ряд. Сколько различных сигналов можно подать с его помощью? А сколько, самое меньшее, надо взять лампочек, чтобы можно было подать 200 различных сигналов?

3. В азбуке племени УЫ всего две буквы: У и Ы. Какое наибольшее число различных пятибуквенных имен могут дать детям в этом племени?

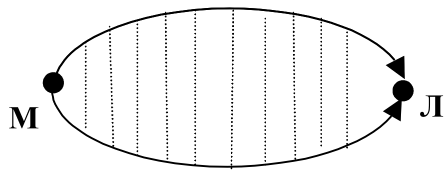
4. Назовем число забавным, если все его цифры делятся на 4. Сколько забавных чисел среди четырехзначных? Шестизначных?

5. Как известно, компьютер работает с *двоичными кодами*, которые представляют собой записи, составленные из нулей и единиц (например, 11001011). Количество знаков в коде называется его длиной. Сколько разных символов можно закодировать двоичными кодами длины 5? Длины 6?

6. Во рту у марсианина есть 10 гнезд для зубов. В каждом гнезде либо есть зуб, либо его нет. Известно, что любые два марсианина отличаются набором зубов (т.е., если взять любых двух, то найдется гнездо, в котором у одного есть зуб, а у другого нет). Каково наибольшее возможно число марсиан?

7. Сигнальный флажок состоит из шести горизонтальных полосок белого, синего или красного цвета, причем верхняя полоска всегда синяя, а соседние полоски – разноцветные. Сколько бывает разных сигнальных флажков?

8. Из Манчестера в Ливерпуль ведут два шоссе с односторонним движением, пересеченные десятью проселками (см. рис.). Машина выезжает из М в Л по одному из шоссе, и, доезжая до любой развилки, может либо свернуть на проселок, либо не сворачивать. Свернув, она проезжает проселок до конца и продолжает пять по другому шоссе (по тем же правилам). Сколькими разными способами можно проехать из Манчестера в Ливерпуль?



9. Имеется 10 различных книг. Сколькими различными способами можно выбрать из них одну или несколько книг для подарка?

10. Сколько различных делителей у числа 42? 30? 210? 2130?

11. Сколько различных пятибуквенных имен можно составить, если в алфавите три буквы?

12. Сколько различных делителей у числа 36? 900?

13. Придумайте задачу на подсчет числа возможностей с ответом 125.

Для самостоятельного решения

14. а) Назовем число отличным, если сумма любых двух соседних его цифр делится на 5. Сколько отличных семизначных чисел оканчиваются на 7?

б) Назовем число плохим, если сумма любых двух соседних его цифр делится на 2. Сколько плохих семизначных чисел оканчиваются на 7?

15. Назовем две цифры *близкими*, если они отличаются на 1. Кроме того, будем считать близкими цифры 0 и 9. Сколько существует различных десятизначных чисел, у которых любые две соседние цифры – близкие.

16. На плоскости дан квадрат 8×8, разбитый на клеточки 1×1. Его покрывают прямоугольными равнобедренными треугольниками (два треугольника закрывают одну клетку). Имеется 64 чёрных и 64 белых треугольника. Назовём покрытие "правильным", если в нём любые два треугольника, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Сколько существует правильных покрытий?

17.* Сколькими способами можно расставить числа 1, 2,…, 10 в строку так, чтобы каждое число, кроме единицы, было больше по крайней мере одного из своих соседей?

КОДИРОВКА-2

1) *Не решая задач*, разбейте их на группы так, чтобы любые две задачи из одной группы кодировалась бы друг другом (и найдите кодировки), а из разных – нет.

2) Найдите ответы для всех задач, решив как можно меньше задач (а *сколько* задач придется решить)?

1. Сколькими способами Александр Николаевич может построить 48 шестиклассников в шеренгу?

2. Сколько сторон и диагоналей у 48-угольника?

3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске размером 48×48 сорок восемь ладей, не бьющих друг друга?

4. Сколькими способами победитель "Поля чудес" может выбрать два приза из 48 имеющихся?

5. Сколькими способами можно выдать 48 шестиклассникам два наряда: на уборку апельсиновых корок и дежурство у телефона?

6. Сколькими способами можно из 48 участников собрания выбрать председателя и секретаря?

7. Есть два письма и 48 разных конвертов. Сколькими способами можно упаковать письма в конверты?

8. Есть 48 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их по одной 48 шестиклассникам?

9. Сколькими способами можно расставить в таблице 6×8 числа от 1 до 48?

10. Сколькими способами можно отметить в таблице 6×8 две клетки?

КОДИРОВКА-3

Тут шесть задач. Но по-настоящему из них достаточно решить только три: задачи с одинаковым номером ("а" и "б") кодируются друг другом. Но ведь кодировку надо еще придумать… или решать все шесть задач!

1а. В левом верхнем углу доски 10×8 стоит ладья. Двое по очереди ходят ею, причем разрешается ходить только вправо или вниз. Выигрывает тот, кто ставит ладью в правый нижний угол. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер?

1б. В одной кучке лежит 7 спичек, в другой – 9. За один ход разрешается взять любое число спичек, но только из одной кучки. Выиграл тот, кто взял последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре?

2а. В городе Колоколамске живут 10 шпионов по кличкам Нелли, Одри, Долли, Тилли, Чарли, Петя, Штирлиц, Супер, Вилли, Деловой. Нелли шпионит за Супером, Одри – за Чарли и Тилли, Долли – за Одри, Штирлицем и Вилли, Тилли – за Петей и Деловым, Чарли – за Долли и Деловым, Петя – за Штирлицем и Долли, Штирлиц – за Тилли и Петей, Супер – за Нелли и Вилли, Вилли – за Чарли, Деловой – за Одри и Вилли. Какое наибольшее число шпионов сможет выстроиться в очередь так, чтобы перед каждым, кроме первого, стоял тот, за кем он шпионит?

2б. Какое наибольшее количество различных цифр можно выписать в ряд так, чтобы, подчеркнув любые две соседних, мы получили двузначное число, делящееся на 7 или 13? Число 07 тоже считается двузначным.

3а. Летучая ладья ходит как обычная, только не может становиться на соседнюю клетку. Может ли она пройти по доске 4×4, побывав на каждой ее клетке ровно один раз.

3б. Хромая ладья ходит как обычная, но только на соседнюю клетку. Может ли она пройти по доске 4×4, побывав на каждой ее клетке ровно один раз.

Соответствие

1. Как вы думаете, кого в России больше: а) женатых мужчин или замужних женщин? б) генералов, у которых есть брат лейтенант, или лейтенантов, у которых есть брат генерал?
2. Среди чисел от 1 до 100000 каких больше: а) простых или составных; б) простых или кратных 3?
3. а) Среди номеров билетов от 000000 до 999999 каких больше: тех, где каждая цифра больше предыдущей, или тех, где каждая цифра меньше предыдущей?
   б) Каких чисел среди шестизначных больше: тех, где каждая цифра больше предыдущей, или тех, где каждая цифра меньше предыдущей?
4. Что можно выбрать из 10 человек большим числом способов: а) двоих дежурных или троих дежурных? б) двоих дежурных или команду из 8 человек?
5. Сколькими способами можно расставить 14 шашек на доске 4×4?
6. У кассира было 30 монет достоинством в 10, 15 и 20 копеек на общую сумму в 5 рублей. Докажите, что 20-копеечных монет у него было больше, чем 10-копеечных. На сколько?

7. В одном доме живут 9 мальчиков и одна девочка. Назовем "компанией" любую группу, состоящую из двух или более детей из этого дома. Каких компаний больше: с девочкой или без девочки? На сколько?
8. а) Докажите, что среди чисел, меньших 10000, поровну чисел с суммой цифр 15 и с суммой цифр 21;

   б) Номер билета от 000000 до 999999 называется счастливым, если сумма первых трех его цифр равна сумме последних трех цифр. Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько билетов с суммой цифр 27.
9. Что можно разменять большим числом способов: а) рубль монетами в 1, 5, 10 и 50 копеек, или 100 рублей монетами и купюрами в 1, 2, 5, 10 и 50 рублей? б) рубль монетами в 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 и 50 копеек или 100 рублей бумажками в 1, 3, 5, 10, 25 и 50 рублей?

Алгоритмы

1. Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошел отряд солдат. Лодка так мала, что на ней могли переправиться двое мальчиков или только один солдат. Однако солдаты переправились через реку. Как?
2. По целым точкам числовой оси прыгает кузнечик. Он может прыгать на 3 вперед или на 2 назад. Как ему пропрыгать по числам от 1 до 1000 ровно по одному разу?
3. Число 1999! заменили на его сумму цифр. Полученное число снова заменили на его сумму цифр, и т.д.

   а) Докажите, что рано или поздно получится однозначное число.

   б) Найдите это число.
4. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске?
5. В строке в беспорядке записаны числа 1, 2,…, 2000.
6. а) Разрешается менять местами любые два рядом стоящие. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.

   б) Разрешается менять местами любые два числа, отличающиеся на 1 (например, 7 и 8), где бы они не стояли. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.

   в) Каким наименьшим количеством перестановок можно гарантированно обойтись в том и другом случае?
7. а) В стране Оз из каждого города выходит по 2 маршрута в другие города страны. Путешественник выехал из столицы, и намерен продолжать путешествие до тех пор, пока ему не придется повторить маршрут. Докажите, что он закончит путешествие в столице. б) То же, но из каждого города выходит 10 маршрутов.
8. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все

клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

Для самостоятельного решения

9. Если на доске записано число А, к нему можно прибавить любой его собственный делитель (отличный от 1 и самого А). Доказать, что из А=4 можно получить любое составное число.
10. В прямоугольнике 3×100 расставлены фишки трех цветов по 100 штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.
11. На некоторых клетках шахматной доски 100×100 стоят ладьи. Докажите, что их можно раскрасить в три цвета так, чтобы ладьи одинакового цвета друг друга не били.

Задачи на движение

1. Минуткин обычно заводил часы до отказа два раза в сутки: утром в 8 ч 30 мин и ночью, ложась спать. Утром приходилось делать 9 полных оборотов головки часов, а ночью – 11. В котором часу ложился спать Минуткин?
2. Лошадь съедает копну сена за 2 суток, корова за 3, овца - за 6 суток. За какое время съедят копну сена лошадь, корова и овца вместе?
3. Андрей ведет машину со скоростью 60 км/ч. Он хочет проезжать каждый километр на 1 минуту быстрее. На сколько ему следует увеличить скорость?
4. Поезд проходит (считая с момента, когда поезд начал въезжать на мост, до момента, когда он целиком съехал с него) мост длиной 450 метров за минуту и полминуты идёт мимо телеграфного столба. Найти длину и скорость поезда.
5. Два охотника отправились одновременно навстречу друг другу из двух деревень, расстояние между которыми 18 км. Первый шел со скоростью 5 км/ч, а второй – 4 км/ч. Первый охотник взял с собой собаку, которая бежала со скоростью 8 км/ч. Собака сразу же побежала навстречу второму охотнику, встретила его, тявкнула, повернула и с той же скоростью побежала навстречу хозяину, и так далее. Так она бегала до тех пор, пока охотники не встретились. а) Сколько раз тявкнула собака? б) Сколько километров она пробежала?
6. Группа туристов должна была прибыть на вокзал в 5 ч. К этому времени с турбазы за ними должен был прийти автобус. Однако, прибыв на вокзал в 3 ч 20 минут, туристы пошли пешком на турбазу. Встретив на дороге автобус, они сели в него и прибыли на турбазу на 20 минут раньше предусмотренного времени. С какой скоростью шли туристы до встречи с автобусом, если скорость автобуса 60 км/ч.
7. Простак и Хитрец спускались на эскалаторе. Посередине Хитрец сорвал с Простака шапку и бросил ее на встречный эскалатор. Простак побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься и вернуть шапку, а

Хитрец вниз, чтобы потом подняться вверх и опередить Простака. Кто первый схватит шапку, если скорости их относительно эскалатора одинаковы, постоянны и не зависят от направления движения?

8. Пароход шел от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно 7 суток. Сколько времени плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

Для самостоятельного решения

9. Пловец плывет вверх против течения Невы. Возле Республиканского моста он потерял пустую фляжку. Проплыв еще 20 минут против течения он заметил потерю и вернулся догонять флягу; догнал он ее возле моста лейтенанта Шмидта. Какова скорость течения Невы, если расстояние между мостами равно 2 км?
10. Пешеход шел 3,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/час?
11. Трус, Балбес и Бывалый в три аппарата гонят самогон. Трус выгоняет бутыль самогона крепостью а градусов за а часов, такую же бутыль Балбес наполняет самогоном крепости b градусов за b часов, а Бывалый – крепости с градусов за с часов. Для ускорения процесса все трое направили шланги в одну бутыль и наполнили ее за сутки. Какова крепость полученного самогона?
12. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов может его выпить за 1 день, а стадо из 37 слонов - за 5 дней. Может ли выпить это озеро один слон, и если да, то за сколько дней?

Принцип крайнего

Я самый, самый, самый, самый …

1. В отряде 6 класса прошло соревнование по перетягиванию каната, в результате все оказались занесены в список по убыванию силы. Вячеслав Александрович задумался: верно ли, что любые трое перетянут любых двоих. За сколько перетягиваний он сможет это установить?

2. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьет не более двух других.

3. По кругу выписаны несколько чисел, каждое равно полусумме двух соседних. Докажите, что все числа равны.

4. Шахматная доска разбита на домино. Докажите, что какая-то пара домино образует квадратик 2×2.

5. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 50 грибов.

6. Кубик Рубика 3×3×3 надо распилить на единичные кубики. После распила части можно перекладывать и прикладывать так, чтобы можно было пилить несколько частей одновременно. Докажите, что понадобится не менее 6 прямых распилов.

7. Можно ли на клетчатой бумаге обвести по линиям сетки два квадрата так, чтобы площадь первого была ровно вдвое меньше площади второго?

8. Известно, что если у двух жителей Вишкиля поровну знакомых среди односельчан, то общих знакомых у них нет. Докажите, что найдется житель, у которого ровно один знакомый односельчанин.

Для самостоятельного решения

9. Путешественник отправился из своего родного города А в самый удаленный от него город страны Б, оттуда – в самый удаленный от Б город В и т.д. Докажите, что если В и А – разные города, то путешественник никогда не вернется домой.

10. У геолога есть чашечные весы без гирь и 8 камней. Он хочет знать, верно ли, что два камня всегда тяжелее одного. Как ему гарантированно проверить это а) за 19 взвешиваний; б) за 13 взвешиваний?

11. В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую. Докажите, что можно так выбрать станцию и закрыть ее на ремонт (без права проезда через нее), что по прежнему можно будет проехать с любой оставшейся на любую оставшуюся.

12. На полях шахматной доски расставлены числа 1, 2, …, 64. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, где числа отличаются не меньше, чем на 5.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 6-7 КЛАССОВ

1. На огороженном поле 1км×1км были построены заборы, разделившие его на прямоугольные участки 5м×20м и 6м×12м. Какова общая длина построенных заборов?

2. В словах МАТБОЙ и БИТВА все буквы заменены цифрами (одинаковые – одинаковыми, разные – разными). Получили два числа – шестизначное и пятизначное. Непорядком назовем пару соседних цифр в одном из чисел, в которой левая цифра больше правой. Какое наименьшее суммарное число непорядков может быть в этих числах?

3. 15 команд играют турнир в один круг. Докажите, что в некотором матче встретятся команды, сыгравшие перед этим в сумме нечетное число матчей.

4. Микрокалькулятор "Чебурашка", умеет складывать, вычитать, запоминать промежуточные результаты и находить по данному числу x обратное к нему число $1/x$. В него ввели число 19/99. Удастся ли получить из него число 1?

5. На зачете трем школьникам было предложено 100 задач, и каждую кто-нибудь да решил. Всего каждый решил по 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил всего один человек, и легкой – если трое. Каких задач больше: легких или трудных, и на сколько?

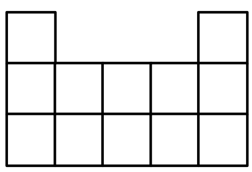
6. В Цветочном городе состоялся турнир по футболу между командами "Шайба", "Зубило" и "Крендель", в котором каждая команда сыграла с каждой одно и то же число матчей. Незнайка написал отчет о турнире и, получив свежи номер газеты "Цветник", с гордостью стал читать: "Доблестная "Шайба" не сделала ни одной ничьей. У нее пять побед и пять поражений. "Крендель играл осторожнее. Он выиграл только три матча, зато шесть свел вничью…" "Экое враньё!" – перебил оратора Знайка. "Откуда ты знаешь? Ты ведь и футболом-то совсем не интересуешься. Да и до конца я ещё не дочитал!" – обиделся Незнайка. "Хоть и не дочитал, а наврать уже успел!" – отрезал Знайка. Прав ли он?

7. В некотором царстве некоторые города соединены непересекающимися прямыми дорогами так , что между любыми двумя городами есть прямой путь по дорогам (возможно, проходящий через промежуточные города). Соловей-разбойник хочет выбрать для грабежа прямой путь, вне которого лежит не более двух городов. Покажите, что это может у него не получиться.

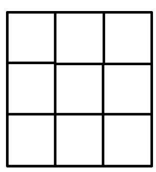
8. Есть 1800 шариков восемнадцати цветов (по 100 шариков каждого цвета) и пустая доска 9×9. Первый играющий выбирает один из шариков и дает второму, который размещает его в одну из клеток доски, и т.д. Если при этом получается группа из 5 шариков одного цвета стоящих подряд по горизонтали или вертикали, они снимаются с доски и больше в игре не участвуют. Если второму некуда поставить шарик, то он проиграл. Если у первого кончились шарики, то проиграл он. Кто может выигрывать независимо от игры противника? (Примечание: если образуется несколько одноцветных групп, все они снимаются одновременно).

9. В каждом из 100 полей, расположенных по кругу, записано натуральное число. На одно из полей ставится фишка. Ход состоит в том, что фишку сдвигают по ходу часовой стрелки на число полей, написанное там, где она была, затем увеличивают на 1 число там, куда она пришла. Докажите, что через некоторое число ходов фишка побывает на всех полях.

10. У Пети есть площадка 3×5, на которую он поставил несколько кубиков с ребром 1. На рисунках даны виды спереди и сбоку того, что получилось. Какое наименьшее число кубиков мог поставить Петя?



вид спереди



вид сбоку

Заключительная олимпиада

Довывод

1. В корпусе есть 8 розеток и 21 тройник. Сколько фумигаторов можно включить в сеть одновременно?

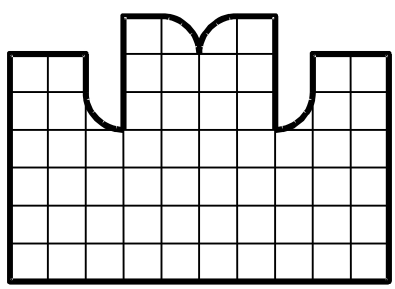


Рис. 1

2. За круглым столом сидят 100 аборигенов, каждый из племени Лжецов или из племени Правдолюбов. Лжецы всегда лгут, а Правдолюбы всегда говорят только правду. На вопрос "Верно ли, что оба ваших соседа - из одного племени?" каждый из 100 ответил "Да". Сколько среди них Правдолюбов?
3. Разрежьте фигуру на рисунке 1 на две части, из которых можно сложить прямоугольник.
4. В типографии было два одинаковых с виду набора букв - легкий и тяжелый, а внутри каждого набора буквы весили одинаково. Ученик смешал наборы. Оказалось, что слово ГРОЗНЫЙ тяжелее чем УЧИТЕЛЬ, составленное из тех же букв слово ГУЛ тяжелее чем РОТ, а буква Т тяжелее Г. Какие буквы - из легкого набора?
5. Можно ли раскрасить 16 шахматных коней в четыре разные масти: вороные, соловые, гнедые и каурые - и расставить их на доске 4×4 так, чтобы вороные не били соловых, соловые - гнедых, гнедые - каурых, а каурые - вороных? (Должны быть все масти.)

Вывод

6. На старт "Веселого забега" на 3000 м выходит команда из трех математиков. Им выдается один одноместный самокат. Дорожка - прямая, стартуют все одновременно, а в зачет идет время последнего. Время соперников - 21 минута. Как математикам финишировать быстрее, если бегают все 125 м/мин, а на самокате ездят - 250 м/мин?
7. Докажите не используя длинного перебора, что нельзя отметить ровно по одной букве в каждом из слов данной задачи так, чтобы среди отмеченных букв не было бы повторяющихся.
8. Коробка представляет собой прямоугольник 7×4, в который укладывается 28 доминошек 2×1 в два слоя. Сначала первый игрок укладывает нижний слой, затем второй игрок - верхний. Если каждая доминошка верхнего слоя лежит на двух доминошках нижнего слоя, выигрывает второй, иначе - первый. Кто из игроков может выигрывать независимо от игры противника?

Программа зачета

1. Аналогия и обоснование
2. Эффект плюс-минус один
3. Геометрические конструкции
4. Разумно организованный перебор
5. Круги Эйлера
6. Можно или нельзя (конструкции и противоречия)
7. Повторямость и симметрия
8. Конструкции на много-мало
9. Анализ с конца.
10. Четность
11. Принцип Дирихле
12. Постепенное конструирование
13. Делимость
14. Пример+оценка
15. Двумя способами
16. Комбинаторика: правило умножения
17. Признаки делимости
18. Части и проценты
19. Комбинаторика и кодировка
20. Соответствие
21. Алгоритмы
22. Задачи на движение
23. Принцип крайнего