Пятнадцатая Летняя многопредметная школа Кировской области

МАТЕРИАЛЫ НЕКОТОРЫХ ЗАНЯТИЙ
(С КОММЕНТАРИЯМИ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ)

6 класс

Вишкиль. 4-28.VII.99 г.

Можно или нельзя (конструкции и противоречия)

Пояснить на примере, как отсечение невозможных случаев сокращает перебор.

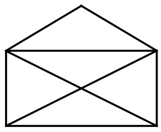


рис. 1

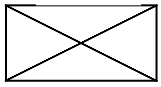


рис. 2

1. Может ли в месяце быть а) 3 б) 4 в) 5 г) 6 воскресений?

Указание: среди любых 7 дней подряд – ровно одно воскресенье

2. Может ли сумма цифр 3-значного числа быть равна а)22 б)28?

3. Может ли произведение цифр трехзначного числа быть равно а)22 б)28?

4. Можно ли, не оторвав карандаш от бумаги и не проведя никакой линии более одного раза, нарисовать открытый конверт (см. рис. 1)? А закрытый (см. рис. 2)?

Можно рассказать о критерии уникурсальности фигур, но углубляться не надо.

5. Можно ли в прямоугольную таблицу поставить числа так, чтобы

а) в каждом столбце сумма была положительна, а в каждой строке – отрицательна;

б) в каждом столбце сумма была больше 10, а в каждой строке – меньше 10.

6. Можно ли на шахматной доске расставить а) 9 ладей; б) 14 слонов так, чтобы они не били друг друга?

Для быстро решивших поставить вопрос: какое наибольшее число ладей(слонов) можно расставить на доске так, чтобы они не били друг друга. Задачи на пример+оценку будут на следующей неделе.

Для самостоятельного решения

7. У шахматной доски выпилены а) угловая клетка; б) две противоположные угловые клетки; в) две клетки разного цвета. Можно ли такую испорченную доску распилить на двуклеточные прямоугольники?

Решение в) Можно всегда. Обойдем шахматную доску ладьей по циклу. Выброшенные клетки разного цвета разобьют цикл на два куска четной длины, и каждый кусок режется на пары соседних клеток.

8. Из 10 одинаковых с виду монет – одна фальшивая (легче настоящей). Можно ли наверняка найти ее за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Решение. Нельзя. Каждое взвешивание делит монеты на три части (левая чашка, правая чашка и остальные), при невезении после первого взвешивания останутся 4 подозрительные монеты, после второго – две.

9. На сковороде могут одновременно жариться 2 котлеты. Каждую надо обжарить с обеих сторон, причём для обжаривания одной стороны требуются 2 минуты. Можно ли поджарить 3 котлеты меньше чем за 7 минут?

10. В магазин привезли платья трех цветов и трех фасонов. Всегда ли можно выбрать для витрины 3 платья, чтобы были представлены все цвета и все фасоны?

Решение. Не всегда. Например, если есть три красных платья трех фасонов, и еще синее и зеленое платье первого фасона, то выбрать требуемым образом нельзя.

Повторяемость и симметрия

Напомнить, как симметрия помогла сократить перебор при поиске пентамино и расстановок ферзей.

1. Как составить квадрат из 100 тетрамино в виде буквы "Т" (см. рис. 1)?

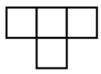
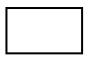
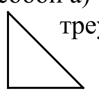


рис. 1

Решение. Из 4 тетрамино составляем квадратик 4×4, а из 25 таких квадратиков – большой квадрат.

Обратить внимание на повторяемость в квадратике и квадратиков.

2. Сколькими способами можно совместить сам с собой а)  прямоугольник ; б) квадрат; в) равнобедренный прямоугольный  треугольник ; г) круг?

Число способов служит мерой симметричности.

3. Разрежьте квадрат на а) два равных шестиугольника; б) два равных пятиугольника; в) четыре равных восьмиугольника.

4. Как известно, в задаче про волка козу и капусту есть способ переправиться без потерь. Докажите, что таких способов по крайней мере два.

Указание. Поменять местами волка и капусту.

5. Есть две клетчатых шоколадки 5×7. Двое по очереди разламывают шоколадку или любой из ранее отломанных кусков на два меньших по границам клеток. Если образуются один или несколько одноклеточных кусков, отломивший их съедает. Докажите, что второй может съесть не меньше первого.

6. Турист хочет дойти от палатки до костра, набрав по дороге в речке ведро воды. Считая положения палатки и костра заданными, а берег реки прямым, придумайте, как ему идти, чтобы путь был самым коротким.

Для самостоятельного решения

7. Можно ли разрезать квадрат на 1000 меньших квадратов (не обязательно одинаковых)?

Решение с повторяемостью. Разрезать квадрат на 100 одинаковых, а затем каждый разбить на 10 меньших.

8. Двое по очереди ставят шахматных слонов в клетки доски 8×8 так, чтобы слоны не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть независимо от игры противника, и как ему при этом нужно играть?

Указание. Симметрия переводит черную клетку в белую.

9. Билеты нумеруются от 000000 до 999999. Номер называется счастливым, если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр. Докажите, что сумма всех счастливых номеров делится а)на 1001; б) на 999.

Решение. а) Если первая и последняя тройка цифр одинаковы, билет уже делится на 1001. Если нет, то прибавим к нему билет, полученный перестановкой троек. б) Если n – счастливый, то 999999-n – тоже, и их сумма делится на 999.

Конструкции на много-мало

Что не запрещено, то разрешено!

Если надо выигрывать чаще, а силы равны, то надо много раз выиграть по чуть-чуть, а проиграть много, но один раз.

0. На одну чашку весов кладется пять десятикопеечных монет, а на другую – равная по массе пачка стодолларовых купюр. Будут ли весы в равновесии?

Задача шутка, напоминающая, что много и мало – понятия относительные.

1. Может ли и сумма, и произведение нескольких натуральных чисел быть равными 99?

Ответ: Например, 9, 11 и 79 раз по 1.

2. Площадь прямоугольника меньше 1 кв.дм. Может ли его периметр быть больше 1 км?

Ответ: Да, пусть стороны равны 500 м и $\frac{1}{100000}$ *м.*

3. На балу было юношей и девушек поровну, было 10 танцев и каждый раз танцевали все.

а) Как могло получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал либо с более красивой, либо с более умной девушкой?

Ответ: Пусть на балу 2 юноши и 2 девушки, причем вторая красивее, а первая – умнее.

б) Как могло получиться, что в дополнение к тому в каждом танце (начиная со второго) был юноша, который танцевал и с более красивой, и с более умной девушкой?

Ответ: Пусть на балу 3 юноши и 3 девушки А, Б и В, причем красота возрастает в порядке АБВ, а ум – в порядке БВА. Юноши чередуют девушек по кругу в порядке АБВ.

Задача (б) – трудная, ее можно большинству рекомендовать пропустить и порешать дома.

4. Сумма положительных чисел больше 10. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?

Ответ: Возьмем 10001 число, все равны $\frac{1}{1000}$, *тогда их сумма равна 10,001, а сумма квадратов –* $\frac{10001}{1000000}$.

Указание: разберите, как ведет себя сумма квадратов при разбиение числа в сумму двух равных.

5. Раз в месяц директор фирмы предлагает трем своим заместителям проголосовать за новый список своей и их зарплат. Сам директор не голосует. Те заместители, чью зарплату предлагается увеличить, голосуют за, остальные – против. Предложение принимается большинством голосов. Может ли директор за год добиться, чтобы его зарплата вдесятеро увеличилась, а зарплаты всех заместителей вдесятеро уменьшились?

Ответ: Например, так: сначала увеличим зарплату директора в 10 раз, двум заместителям добавим по чуть-чуть, а у третьего уменьшим в 100 раз. Во втором месяце добавим по чуть-чуть первому и третьему, и уменьшим в 100 раз у второго. В *третьем месяце аналогично уменьшим первого. Далее можно понемногу прибавлять всем, но так, чтобы у заместителей было меньше, чем* $\frac{1}{10}$ *от первоначальной зарплаты.*

Мораль: на жадину не нужен нож…

6. На занятии Вася, Леня и Стас решили все задачи. Может ли оказаться, что на Стас большинство задач решил раньше Лени, Леня – большинство раньше Васи, а Вася – большинство раньше Стаса?

Решение. Да. Например, задач всего три, первую задачу решил сперва Стас, потом Леня, потом Вася; вторую – Леня, Вася, Стас; третью – Вася, Стас, Леня.

Опережать нужно ненамного, а отставать – сильно.

7. Фирма проработала полгода, подсчитывая свою прибыль каждый месяц. Каждые два подряд идущих месяца суммарная прибыль была отрицательной. а) Может ли суммарная прибыль за все полгода быть положительной? б) А за первые 5 месяцев?

Ответ: а) Нет. Разбиваем 6 месяцев на пары, складываем и видим, что суммарная прибыль тоже должна быть отрицательной. б) Да: +100, -101, +100, -101, +100. Как найти пример? Если выкинуть нечетный месяц, то остальная часть разбивается на двухмесячные отрезки, поэтому в сумме отрицательна. Значит, выкинутый месяц дал положительную прибыль. Каждый из оставшихся четных месяцев должен тогда давать отрицаетльную прибыль. Теперь естественно попробовать взять одинаковые прибыли у четных, и одинаковые – у нечетных. Если сделать отрицательную прибыль за два месяца маленькой, то три положительных перевесят два отрицательных месяца.

Задача (б) очень трудная, поэтому можно ее давать и разбирать для трех месяцев.

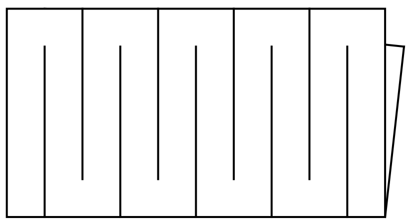
Для самостоятельного решения

8. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов а) с суммой периметров 100 б) с суммой площадей 100?

Ответ: а) Да: разобьем квадрат 1×1 на 100×100 квадратов (сумма их периметров будет равна $100 \times 100 \times 4 \times \frac{1}{100}$ *=400>100), а затем чуть уменьшим каждый квадрат).*

9. В однокруговом футбольном турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. «Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

	1	2	3	4	5	6	Сп	
1		1	1	1	1	1	2	7
2	1		1	1	1	1	2	7
3	1	1		1	1	1	2	7
4	1	1	1		1	1	2	7
5	1	1	1	1		1	0	5
6	1	1	1	1	1		0	5
Сп	0	0	0	0	2	2		4



10. Прорежьте в тетрадном листке дыру, в которую может пролезть Вячеслав Александрович.

11. В припортовой таверне пираты Боб и Иван состязались в изготовлении и употреблении крепких напитков. Боб изготовил коктейль из рома и виски, а Иван смешал водку с портвейном. Известно, что ром крепче водки, а виски крепче портвейна. Может ли смесь Ивана оказаться крепче коктейля Боба? (Примечание для непьющих: крепость – это процент спирта в смеси.)

Указание. Водке не запрещено быть крепче виски. Тогда Иван может пить почти чистую водку, а Боб – почти чистый виски.

Ответ: Да, пусть крепость рома – 50%, водки – 40%, виски – 30%, портвейна – 20%. Боб смешает 1 часть рома и 9 частей виски, получит крепость 32%; Иван смешает 9 частей водки и 1 часть портвейна, получит 38%

Четность

Идея занятия: четность, важное свойство, которое легко отслеживать, и которое позволяет отсекать невозможные случаи.

1. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 19995?

Ответ: нет, т. к. 19995 – число нечетное. Если исходные два числа имеют одинаковую четность, то их разность четна, иначе одно из них четное.

2. Можно ли разменять 25 тугриков десятью купюрами достоинством в 1, 3 и 5 тугриков?

Ответ: нет, т. к. сумма четного числа нечетных чисел четна.

3. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция закричала "Это обман!". Почему?

Ответ: если сумма двух чисел четна, то их разность – тоже.

4. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей разного пола четно.

Решение: если пойти по часовой стрелке, начав с какого-нибудь мальчика, то количество "переходов" с мальчика на девочку и с девочки на мальчика должно быть одинаковое, т. е. общее количество "переходов" (= разнополых пар) четно.

5. **Лемма о рукопожатиях**. Докажите, что общее число участников ЛМШ99, совершивших с другими участниками нечетное число рукопожатий, четно.

Решение: Сумма количеств рукопожатий по всем людям четна, поскольку равна удвоенному числу всех рукопожатий. А если число нечетных людей было нечетно, то и сумма по людям была бы нечетной.

Эта лемма очень важна. Рукопожатиями можно промоделировать любые симметричные отношения. Приведите детям другие примеры, скажем, количество монет, лежащих на столе и касающихся нечетного числа других монет – четно.

6. На шахматной доске стоят 11 шашек, расположенных симметрично относительно большой диагонали. Докажите, что есть шашка или шашки и на большой диагонали.

Решение: Шашки, не стоящие на большой диагонали, можно разбить на пары симметричных друг другу, значит, их четное число.

Отметить, что четность – близкий друг симметрии.

7. а) На столе лежит 21 монета решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть любые 20 монет. Можно ли за несколько операций добиться, чтобы все монеты легли орлом вверх? б) Тот же вопрос, если монет 20, а разрешается переворачивать по 19.

Решение: а) число монет, лежащих орлом вверх, четно в начале и не меняет четность при указанной операции; б) перевернем все монеты, кроме первой, затем все, кроме второй, и т. д. – всего 20 раз. В итоге каждая монета перевернется по 19 раз, значит, все будут лежать орлом вверх.

Надо упомянуть об инварианте (не напирая на слово) – то есть неизменном свойстве.

Для самостоятельного решения

8. Состоялось заседание руководителей 15 республик бывшего Советского Союза. Резидент одной из разведок сообщил, что каждый руководитель заключил тайное соглашение ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

Решение: нет, в графе четное число вершин нечетной степени (сравни с леммой о рукопожатиях).

9. * В клетчатом квадрате, разрезая по границам клеток, прорезали квадратную дырку поменьше. Может ли оставшаяся фигура состоять ровно из 250 клеток?

   Решение: Нет. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. *Если a и b одной четности, то (a+b) и (a-b) оба четные, и разность квадратов делится на 4, иначе (a+b) и (a-b) оба нечетные и разность квадратов нечетна.*

10. * Докажите, что число способов расставить на доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга – четно.

    Решение: проведем симметрию относительно вертикальной прямой, делящей доску пополам. Если какая-то позиция перешла в себя, то в ней 2 ферзя стоят на одной горизонтали, и, следовательно, бьют друг друга. Значит, такой позиции нет и все они разбиваются на пары.

Анализ с конца

Бывает, что задом наперед ходить удобнее…
Рак

1. За булочками к вечернему чаю выстроилась очередь. Булочки задерживались, и в каждый промежуток между стоящими успело влезть по человеку. Булочки все еще не начали выдавать, и во все промежутки опять влезло по человеку. Тут наконец принесли 85 булочек, и всем стоящим досталось по одной. Сколько человек стояли в очереди первоначально?

   Ответ: 22

2. В колбу пустили бактерию. Каждую минуту число бактерий удваивается. Через три часа колба заполнилась бактериями. В какой момент бактериями была заполнена четверть колбы?

   Ответ: Через 2 часа 58 минут. Полезно выпустить кого-нибудь к доске с ответом 45 минут и спровоцировать спор.

3. Предложил черт лодырю: "Всякий раз, как перейдешь этот волшебный мост, твои деньги удвоятся. За это ты, перейдя мост, должен будешь отдать мне 40 рублей." Трижды перешел лодырь мост – и остался совсем без денег. Сколько денег было у лодыря первоначально?

   Ответ: 35 рублей.

   Наводящий вопрос: меньше или больше 40 рублей было у лодыря вначале?

4. Трем братьям дали 24 бублика так, что каждый получил на три бублика меньше, чем ему лет. Меньший брат был сообразительный и предложил поменять часть бубликов: “Я,– сказал он,– оставлю половину бубликов, а другую разделю между вами поровну; после этого средний брат также оставит половину бубликов, а другую разделит поровну между мной и старшим братом. В конце старший брат поделит так же”. Так они и сделали. Оказалось, что все получили поровну. Сколько лет каждому брату?

   Ответ: 7, 10, 16.

5. Над озерами летели гуси. На каждом садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на 7 озерах. Сколько было гусей?

   Ответ: 127.

   Полгуся сбивают с толку, надо обсудить на примере. Потом можно добавить к гусям серого гуся и увидеть, что тогда на каждом озере садилась ровно половина всех гусей.

6. Учитель раздавал школьникам открытки. Первому он дал одну открытку и одну десятую оставшихся. Второму он дал две открытки и одну десятую оставшихся и т. д. Девятому он дал девять открыток и одну десятую оставшихся. Оказалось, что все получили поровну и все открытки были розданы. Сколько всего было открыток?

   Ответ: 81.

Наводящий вопрос: как можно дать одну десятую оставшихся и при этом ничего не оставить?

Для самостоятельного решения

7. 5 человек сидят за круглым столом. У первого есть 81 яблоко, у остальных – разное количество. Вначале первый дает каждому из остальных столько яблок, сколько у того уже есть. После этого остальные делают то же самое. Когда они закончили, яблок у всех стало поровну. Сколько яблок было у каждого вначале?

Ответ: 81, 41, 21, 11, 6.

8. Решить уравнение $1+2:(1+32:(1+1024:(1+32:(1+2:(1+2:(1+2:(1+2:x)))))))=1987$.

Ответ: $x=-1$.

9. Можно ли, взявшись двумя руками за концы веревки и не отпуская их, завязать на ней узел?

Сначала завязываем руки узелком, а уже потом берем концы веревки…

10. * За столом сидят 7 гномов, перед каждым – кружка, в некоторые налит эль (но, быть может, не поровну). Первый разлил весь свой эль поровну в кружки всем остальным. Затем второй разлил свой эль поровну всем остальным (включая первого), затем третий гном и т.д. до седьмого. Когда и седьмой гном разлил свой эль, у всех оказалось столько же эля, сколько было вначале. Сколько эля в каждой кружке, если всего его 3 литра?

Ответ: 6/7, 5/7, 4/7, 3/7, 2/7, 1/7 и 0.

Принцип Дирихле

1. В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.

Решение: Предположим, что в каждом классе не более 33 учеников, тогда всего в школе не более $33\times30=990$ учеников. Противоречие.

2. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежали яблоки одного сорта. Найдутся ли 9 ящиков одного сорта?

Решение: Предположим, что не найдутся, то есть яблок каждого сорта не более, чем 8, тогда всего ящиков не более, чем 24, что противоречит условию.

3. Докажите, что среди любых 11 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 10.

Решение: Рассмотрим последние цифры этих чисел. Так как всего чисел 11, а различных цифр 10, то найдется два числа с одинаковой последней цифрой. Их разность будет делиться на 10.

4. Можно ли расставить на шахматной доске 17 королей так, чтобы они не били друг друга?

Решение: : Нет. Разделим доску на 16 клеток 2×2. Тогда в одной из клеток обязательно окажется 2 короля, которые будут бить друг друга.

5. Пятнадцать мальчиков собрали вместе сто орехов. Докажите, что какие-то двое из них собрали одинаковое количество орехов.

Решение: Предположим, что они собрали попарно различное количество орехов. Расположим их по возрастанию этого количества. Тогда 2-й мальчик собрал не менее 1 ореха ,3-й – не менее 2-х, и т.д. , 15-й – не менее 14-ти. Тогда вместе они собрали не менее 105 орехов, что противоречит условию.

6. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу.

Решение: Подсчитаем пары друзей. У каждого из них 9 друзей, умножить на 10 человек и разделить на 2, так как каждая пара таким образом посчитана дважды, получается 45 пар, а открыток всего 50, следовательно на какую-то пару придется не менее двух открыток, то есть друзья обменяются открытками.

7. Докажите, что в любой момент однокругового чемпионата найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Решение: Пусть на какой-то момент времени все n *команд сыграли различное количество матчей. Но так как команда не может сыграть больше, чем* $n-1$ *матч, то всего различных вариантов количества сыграных матчей* n *(от 0 до* $n-1$*). Тогда получается, что команды сыграли соответственно* 0, 1, 2, ...,$n-1$ *матч. Но тогда команда, сыгравшая* $n-1$ *матч должна была сыграть со всеми, то есть нет команд, сыгравших* 0 *матчей. Противоречие.*

Для самостоятельного решения

8. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать коврик размера 1×1 метр, в котором нет ни одной дырки.

Решение: Разрежем ковер на 16 ковриков размером 1×1*, тогда на один из них не хватит дырки.*

9. Докажите, что среди любых 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Решение: Выберем какого-нибудь человека, скажем Петю. У тогда из остальных пяти либо найдутся трое знакомых с Петей, либо незнакомых с ним. Без ограничения общности рассмотрим первый случай. Если эти трое незнакомы друг с другом, то задача решена, а если среди них есть пара знакомых, то вместе с Петей они и составляют искомую тройку.

10. На шахматной доске стоит 31 фишка. Докажите, что найдется свободный уголок из трех клеток.

Решение: Разрежем доску на 16 квадратов 2×2*. Тогда в какой-то из них попадет не более одной фишки и значит поместится уголок из трех клеток.*

Постепенное конструирование

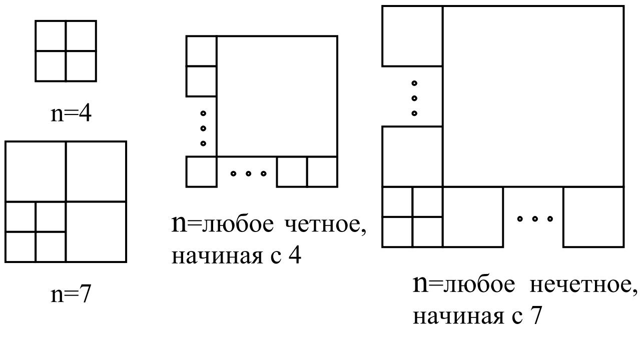
Если забор не удается перепрыгнуть, попробуйте через него перелезть…

1. а) Придумайте 3 различных натуральных числа, чтобы каждое делило сумму остальных; б) то же, но все числа больше 100; в) как в (а), но 4 числа; г) как в (а), но 10 чисел.

Решение: а), б) 100, 200, 300. в) Если уже построен набор из n *чисел, то к ним можно добавить* $(n+1)$*-ое число – их сумму, т. к. она делится на каждое из этих* n *чисел и ее прибавление к набору из* $(n-1)$*-го числа не изменяет их делимости на оставшееся. Таким образом, получаем, например, ряд 1, 2, 3, 6, 12, 24, и т. д.*

2. Разрежьте квадрат на n меньших квадратов (не обязательно одинаковых) а) $n=4$; б) $n=7$; в) $n=10$; г) $n=1999$.

Решения см. на рисунках справа



3. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы без гирь, отмерить 9 кг гвоздей?

Решение: Мы можем разделить 24 кг на 2 группы по 12 кг, затем одну из них – на 2 группы по 6, затем одну из них – на 2 группы по 3 и сложить группы 3 и 6.

4. Давным-давно в СССР имелись в обращении 3-копеечные и 5-копечные монеты. Докажите, что можно было набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

Решение: Если число делится на 3, набираем требуемую сумму монетами по 3 копейки – так можно получить 3, 6, 9, 12,… Если число дает остаток 2 по модулю 3, то берем одну пятикопеечную и необходимое количество трехкопеечных – получаем 5, 8, 11, и т. д. Если число дает остаток 1 по модулю 3, берем 2 монеты по 5 и остальное дополняем *трехкопеечными – получаем 10, 13, 16, …Видно, что можно получить любое число, кроме 1, 2, 4 и 7.*

5. Представьте число 1 в виде суммы а) трех б) четырех в) десяти различных дробей с числителем 1.

Решение: а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. *Дальнейшие примеры получается следующим образом: берем самую маленькую дробь, и если ее знаменатель – четное число, равное 2а, то разбиваем эту дробь на две:* $\frac{1}{2a}=\frac{1}{3a}+\frac{1}{6a}$.*Замечаем, что в итоге получаем наименьшую дробь с четным знаменателем (6а), то есть процесс можно продолжить.*

6. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

Решение: рассмотрим путь, проходящий по всем клеткам доски. Пустим маляра вперед по этому пути. Пусть маляр оглядывается по прохождении каждой клетки и смотрит, в нужный ли цвет она покрашена. Если в нужный – все нормально, идем дальше. Иначе возвращаемся назад, перекрашиваем ее и снова идем вперед. Так мы сможем покрасить все, кроме последних двух клеток – с ними можно разобраться отдельно.

Для самостоятельного решения

7. При каких натуральных *n* можно разрезать квадрат на *n* меньших квадратов (не обязательно одинаковых)?

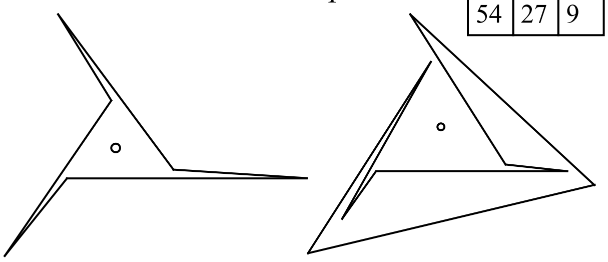
Решение: Выше приведены примеры для n=1, 4, и всех, начиная с 6. Остается 2, 3 и 5. Невозможность разрезания на 2 и 3 очевидна. Для n=5 устраиваем перебор: 4 квадрата должны располагаться в углах, пятый обязан примыкать к какой-то стороне, дальше – просто.

8. Расставьте различные натуральные числа в таблицу 2×3 (2 строки, 3 столбца) так, чтобы произведения в столбцах были равны, и суммы в строках тоже были равны (но суммы могут отличаться от произведений).

Решение: Сначала расставляем любые числа так, чтобы произведения в столбцах были равны. Затем, если умножить все числа в одной строке на любое натуральное число, то произведения останутся равными.

10	20	60
54	27	9

9. а) Может ли свеча внутри пустой многоугольной комнаты не освещать полностью ни одну из стен? б) Существует ли многоугольник и точка вне него, из которой ни одной стороны не видно полностью?



10. У входа в пещеру с сокровищами стоит бочка с 4 дырками по кругу в крышке. В каждой дырке можно нащупать селедку хвостом вверх или вниз. Али-Баба может просунуть руки в любые две дырки, определить положение селедок под ними и, если хочет, перевернуть одну или обе по своему усмотрению. Когда хвосты всех четырех селедок окажутся направленными в одну сторону, дверь в пещеру откроется. Однако, после того, как Али-Баба вытаскивает руки, бочка некоторое время с дикой скоростью крутится, так что Али-Баба не может определить, куда именно он совал руки раньше. Как Али-Бабе открыть дверь не более чем за 10 засовываний?

Решение: 1. Засовываем руки в 2 соседних дырки и делаем так, чтобы там обе селедки находились хвостами вверх. 2. Засовываем руки в 2 дырки по диагонали и делаем так, чтобы там обе селедки находились хвостами вверх. Если дверь еще не

○ – хвост вниз

● – хвост вверх

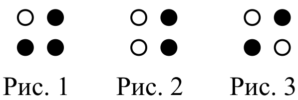


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

открылась, то получаем ситуацию, изображенную на рисунке 1 (с точностью до поворота).
3. Засовываем руки по диагонали. Если одна из селедок хвостом вверх, а другая – вниз, то переворачиваем вверх ту, которая была вниз, и дверь открывается. Если обе – вверх, то переворачиваем одну из них хвостом вниз и получаем ситуацию, изображенную на рисунке 2.
4. Засовываем руки в соседние дырки. Если там селедки имеют одинаковое направление хвостов, то переворачиваем обе и дверь открывается. Иначе – тоже переворачиваем обе и получаем ситуацию на рисунке 3.
5. Засовываем руки по диагонали и переворачиваем обе селедки. В итоге Все четыре селедки оказываются направленными в одну сторону, и дверь открывается.

Делимость

Цель: показать делимость как легко проверяемое свойство, которое можно использовать для отсечения невозможных вариантов. Важно подчеркнуть не только разрушительную роль делимости (невозможность), но и созидательную.

1. Можно ли монетами в 14 и 35 шиллингов заплатить без сдачи сумму в 1999 шиллингов?
Общий делитель 7.

2. Можно ли прямоугольник со сторонами 2,3×3,5 см разрезать на прямоугольнички 0,08×0,07 см?
Показать, что даже нецелое число может делиться нацело на другое.

3. Дети, построенные парами, возвращаются с вечернего чая с пряниками в карманах. В каждой паре у одного пряников вдвое больше, чем у другого. Может ли они у всех вместе быть ровно 1000 пряников?
Скрытая делимость на 3 как инвариант.

4. В банк можно положить за один раз 120 руб. или снять 300 руб. На счету есть 1000 руб., а других денег нет. Какую наибольшую сумму можно снять за несколько раз?
Оценка получается из делимости. Снять и положить можно только числа, делящиеся на 60 (120=60×2, 300=60×5), максимальное число, меньшее 1000 и делящееся на 60 – это 960. Пример: снимаем 3 раза по 300, остается 100, кладем 2 раза по 120, получаем 340, снимаем 300 – остается 40, то есть взяли 960.

5. Может ли наименьшее общее кратное двух чисел равняться их сумме?
Из делимости a на b следует неравенство $b \le a$. НОК(x,y) делится на x и на y. Тогда $x+y$ делится на x и на y, значит, x делится на y и y делится на x, тогда $x \le y$ и $y \le x$. Получаем $x=y=$НОК$(x,y)=x+y$ – противоречие.

6. Количество натуральных делителей некоторого числа нечетно. Докажите, что это число – полный квадрат.
Все делители натурального числа разбиваются на пары, дающие в произведении само число. Только если число – полный квадрат, то имеем непарный делитель, и их общее число нечетно.
Разбиение на пары – подготовка к теме "соответствие". И важная лемма.

Для самостоятельного решения

7. На Луне ходят монеты достоинствами только в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил на сдачу на одну монету больше. Какую наименьшую сумму могла стоить покупка?

8. Представьте какое-нибудь число в виде суммы семи его различных делителей.

9. Может ли наименьшее общее кратное трех чисел равняться их сумме?

10. У царя Дадона в одиночных камерах сидели 100 пленников. Поворот ручки отпирает каждую камеру, следующий поворот запирает, еще один снова отпирает и т.д. К празднику царь решил освободить часть пленников и накануне послал слугу, который повернул ручку на дверях каждой камеры. Все двери оказались отперты. Но тут пришел второй посыльный и повернул ручку каждой второй камеры. Двери 2-й, 4-й, 6-й,…камер вновь оказались заперты. Следующий посланец повернул ручки 3-й, 6-й, 9-й, 12-й и т.д. камер. Еще один – в каждой четвертой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ручку сотой камеры. Наконец наступил праздник, и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу. Сколько пленников освободил Дадон?

Пример+оценка

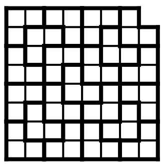
Необходимо подчеркнуть важность общего рассуждения (больше или меньше найденного не может быть ни в каком случае!) и указать, что без него все ссылки на невыгодность математически несостоятельны. Разбирая решения задач, отметить, что для оценки перебор, как правило, неплодтворен.

1. Электронные часы показывают цифры часов и минут (например 13:10). Какая наибольшая сумма цифр может быть на таких часах?

В отличие от чисел наибольшая сумма достигается не на наибольшем времени. Ответ: В 19 часов 59 минут имеем сумму цифр 1+9+5+9=24.

2. Какое наибольшее число трехклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?

Ответ: 21. Больше нельзя, т. к. 22×3=66>64. Пример см. на рисунке справа.



При затруднении с примером разобрать квадраты 2×2 и 4×4.

3. Каким наименьшим количеством монет в 3 и 5 коп можно набрать сумму 37 копеек?

Обязательно вытащить на доску такое решение: Ответ: 9 монет – 4 трешки и 5 пятаков. 8 монет не может быть из-за четности, а 7 монет – это максимум 35 коп.

4. Какое наименьшее число ладей могут побить всю доску?

Пример тривиален, важна оценка. При 7 и менее ладьях по принципу Дирихле останутся непобитая горизонталь и непобитая вертикаль, и ***на их пересечении*** *– непобитая клетка.*

5. Найдите наименьшее возможное число членов кружка, если известно, что девочек в нем меньше 50%, но больше 40%?

Ответ: 3/7. Здесь как раз основная трудность – в переходе к дробям, а оценка достигается перебором по меньшим знаменателям.

6. В вишкильскую столовую надо доставить несколько бочек с апельсинами общей массой 10 т. Каждая бочка весит не более 1 т. Какого наименьшего количества трехтонок для этого заведомо хватит?

Каждая трехтонка может увезти более 2 т, поэтому 5 трехтонок заведомо хватит. С другой стороны, если есть 13 бочек по 10/13 т, то на одну трехтонку войдет не более 3 бочек, поэтому нужно не менее 5 трехтонок.

Важная задача. Здесь и пример, и оценка требуют общего рассуждения. Поскольку задача очень трудная, надо вызвать человека с идеями к доске и решать всем вместе.

Для самостоятельного решения

7. Какое наибольшее количество коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

8. Четыре кузнеца должны подковать пять лошадей. Какое наименьшее время они могут затратить на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову пять минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)

9. Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички (каждая спичка составляет ровно одну сторону клетки). Какое наименьшее количество спичек необходимо убрать, чтобы ладья могла добраться с любого поля на любое, не перепрыгивая через спички?

10. * На зачете 10 школьникам надели на голову шапочки красного или белого цвета и построили их в колонну так, чтобы каждый мог видеть цвет шапочек только у впереди стоящих. Дальше их начинают спрашивать о цвете шапочки, начиная с заднего (который видит всех, кроме себя) по порядку. Если угадал цвет своей шапочки, то сдал зачет, а если нет, то нет. Школьники знали об испытании и могли заранее договориться, как понимать чужие ответы (например, школьник мог посчитать сколько белых и сколько красных шапочку он видит, и назвать цвет, которого меньше). Какое наибольшее число школьников может наверняка сдать зачет?

Двумя способами

Зрение двумя глазами стереоскопично. Взгляд с двух точек иногда выявляет противоречие, в других случаях выявляет соотношение, дающее решение.

1. а) Можно ли расставить числа в таблице 6×9 так, чтобы в каждом столбце была сумма по 10, а в каждой строке – по 20?

Решение: нет, т. к. сумму всех чисел таблицы можно посчитать двумя способами: по строкам (получаем 6×20=120) и по столбцам (получаем 9×10=90).

б) В прямоугольной таблице 8 столбцов, сумма в каждом столбце – по 10, а в каждой строке – по 20. Сколько в таблице строк?

Решение: 4. Сумма всех чисел таблицы по столбцам равна 8×10=80, значит, строк там 80/20=4.

2. Средний возраст 11 игроков футбольной команды – 22 года. Во время матча один игрок получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся – 21 год. Сколько лет получившему травму?

Решение: Суммарный возраст игроков до ухода равен 11×22=242, а после – 21×10=210. Значит, возраст ушедшего – 242-210=32 года

3. В строку записаны n чисел, причем суммы любых трех подряд равна 7, а сумма всех равна 20. а) Может ли n равняться 12? б) Может ли n равняться 10? Найдите седьмое число.

Решение: а) Если n=12, то числа можно разбить на 4 группы по 3 подряд идущих, значит, сумма всех чисел равна 7×4=28, а не 20.

б) Первое, второе и третье числа образуют тройку, и их сумма равна 7. Аналогично – числа с номерами 4, 5, 6 и 8, 9, 10. Значит, сумма всех чисел, кроме седьмого, равна 7×3=21, следовательно, седьмое равно 20-21=-1. Пример такой строки: -1, 4, 4, -1, 4, 4, -1, 4, 4, -1.

4. В однокруговом турнире участвовали 15 шахматистов. Могло ли оказаться, что каждый из них ровно 5 раз сыграл вничью?

Решение: Ничья взаимна (если А сыграл вничью с В, то В сыграл вничью с А). Если попросить игроков обмениваться рукопожатием после ничьей, получим противоречие по лемме о рукопожатиях. Другой способ (по теме) – пусть за ничью каждый получает по очку. Тогда суммируя эти очки по играм, получим четное число, а по игрокам – нечетное. Противоречие.

5. Четыре девочки – Катя, Лена, Маша и Нина – участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен – больше, чем каждая из остальных, а Лена – 5 песен – меньше, чем каждая из остальных девочек. Сколько песен было спето?

Решение: Пусть за каждую песню каждая девочка получит по фантику. Суммируя общее число фантиков по песням видим, что это число делится на 3 (каждая песня исполнялась 3 раза). Кроме того, Маша и Нина получили не более 7 и не менее 6 фантиков *каждая. Значит, всего было роздано не более, чем 8+7+7+5=27 и не менее, чем 8+6+6+5=25 фантиков. Единственное число от 25 до 27, кратное 3 – это 27, поэтому спето 27:3=9 песен.*

6. Иван с сыном и Степан с сыном были на рыбалке. Иван и его сын поймали рыб поровну, а Степан – втрое больше своего сына. Всего поймали 25 рыб. Сколько рыб поймал Иван?

*Это особо трудная задача, поскольку здесь **три** случая, из них два неочевидных. Два из случаев дают противоречие, и только третий – решение.*

Решение: Если это 4 разных человека, то сумма количества рыб у Степана и сына делится на 2, и сумма рыб у Ивана с сыном – тоже. Значит, общее число рыб должно делиться на 2, а это не так. Если Иван – отец Степана, то Иван поймал столько же рыб, сколько Степан, то есть в 3 раза больше, чем сын Степана. Тогда все вместе поймали в 7 раз больше рыб, чем сын Степана. Но 25 не делится на 7. Остается случай, когда Степан – отец Ивана. Тогда Степан поймал в 3 раза больше рыб, чем Иван и чем его сын, значит все вместе поймали в 5 раз больше рыб, чем Иван, то есть у Ивана 5 рыб.

Для самостоятельного решения

7. Длина стороны *AC* треугольника *ABC* равна 3,8. Длина стороны *AB* – 0,6. Найти длину стороны *BC*, если известно, что она выражается целым числом.

Решение: Применяя дважды неравенство треугольника, видим, что AC находится между 3,8-0,6 и 3,8+0,6, то есть между 3,2 и 4,4. Значит, AC=4.

8. Две команды разыграли первенство отряда по десятиборью, причем за победу в каждом из видов команда получала 4 очка, за ничью – 2 очка и за проигрыш – 1 очко. Вместе обе команды набрали 46 очков. Сколько было ничьих?

Решение: В случае ничьей обе команды в сумме получают 4 очка, а иначе – 5 очков. Если бы произошло 10 ничьих, то всего команды набрали бы 4×10=40 очков. Каждая результативная игра добавляет к этой сумме по одному очку. Значит, было 46-40=6 результативных игр и 4 ничьи.

9. У царя Гороха I было три сына. Каждый из его потомков либо умер во младенчестве, либо правил государством и также имел трех сыновей. Известно, что последним правителем был Горох XVII. Сколько потомков царя Гороха умерло во младенчестве?

Решение: Каждый правящий потомок приносит по 3 сына в общее число потомков. Правящих Горохов было 17, значит у них всего 51 сын. Добавим сюда одного Гороха I, который не был сыном ни одного из правящих Горохов. Получаем, что в династии было 52 человека, из них 17 царствовали, и 52-17=35 умерли во младенчестве.

10. В классе, где я учился, каждый мальчик дружил с тремя девочками, а каждая девочка - с двумя мальчиками. При этом в классе был 31 пионер и стояло 19 парт. Сколько учеников было в моем классе?

Решение: Всего дружб было в 3 раза больше, чем мальчиков – с одной стороны, и в 2 раза больше, чем девочек – с другой стороны. Значит, девочек было в полтора раза больше, чем мальчиков, то есть девочек – 3 части и мальчиков – 2 части. Часть – число целое, поскольку равна разности между числом девочек и числом мальчиков. Тогда всего в классе 5 частей, то есть общее число учеников делится на 5. С другой стороны, учеников не меньше 31 и не более 19×2=38 (за партой – не более двух человек), и единственно возможный ответ – 35.

11. Первый разбойник взял 100 рублей и 20-ю часть оставшейся добычи, второй взял 200 рублей и 20-ю часть остатка, третий – 300 рублей и 20-ю часть остатка, и так далее. Оказалось, что добычу поделили поровну. Сколько разбойников и какова добыча?

Решение. Последний взял сколько-то рублей сразу и 20-ю часть остатка. Но добыча оказалась поделена поровну, значит, этот остаток равен нулю. Предпоследний сначала взял на 100 рублей меньше, чем последний, а затем – 20-ю часть остатка. В итоге у них оказалось поровну, то есть 20-я часть этого остатка и равна 100 рублям. Тогда этот *остаток составлял 2000 рублей, и 19/20 его забрал последний разбойник. Это составило 1900 рублей, и всего разбойников было 19. Суммарная добыча составляет 1900×19=36100 рублей.*

Комбинаторика: правило умножения

Комбинаторные рассуждения для многих трудны, поскольку ненаглядны. Комбинации – это объекты несуществующие, и потому для многих – бессмысленные. Поэтому здесь подобраны задачи про заведомо существующие осмысленные объекты. Очень важно сразу учить оформлять рассуждения в графическом виде – графами и таблицами.

Если первый элемент пары можно выбрать a способами, и при каждом выборе второй элемент пары можно выбрать b способами, то всего пару можно выбрать ab способами. Нарисовать для пояснения дерево перебора с метелочками.

1. а) У скольких двузначных чисел все цифры четные? б) А у скольких трехзначных?
Решение (а) оформить также в виде таблицы. Про (б) – 3 способа: разветвленное дерево, таблица, где строки занумерованы парами и трехмерная таблица

2. Сколько диагоналей в выпуклом 10-угольнике?
Посчитать половинки диагоналей.

3. Комбинация из трех букв на автомобильном номере состоит только из тех русских букв, у которых есть похожие латинские, а именно из А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х. Сколько всего таких комбинаций?
Отметить, что буквы могут повторяться.

4. Сколькими способами в команде из 8 человек можно выбрать а) капитана и заместителя; б) двоих дежурных?

5. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?
Перебор по положениям белой ладьи.

6. а) У скольких двузначных чисел все цифры разные? б) А у скольких трехзначных? в) А у скольких 11-значных?
Дополнительно можно изобразить все числа в виде таблицы, и получить второе решение с вычитанием лишних случаев (грубо говоря, квадрат минус диагональ).

7. На окружности отмечены 5 красных и 7 синих точек. Рассмотрим всевозможные отрезки (хорды) с концами в отмеченных точках. У скольких отрезков концы а) разного цвета; б) одинакового цвета?
Очень полезно разобрать два решения: с деревом перебора и с таблицей. Отметить формулу сложения случаев.

8. В обычном домино на половинках доминошек бывает от 0 до 6 точек. Всего в комплекте 28 доминошек. А сколько доминошек будет в комплекте, где на половинке возможно от 0 до 13 точек?
Ответ: 91. Поскольку задача двухходовая, часто дают неправильные ответы. В этом случае рекомендовать проверить способ решения на обычном домино. При разборе обязательно оформить рассуждения в виде таблицы.

Для самостоятельного решения

9. Сколькими способами можно разменять 50 руб монетами в 1 и 2 руб?

10. Сколькими способами можно поставить на доску черного и белого королей так, чтобы они не били друг друга?

11. Билеты нумеруются от 000000 до 999999. У скольких из них сумма первых трех и сумма последних трех цифр равна 15?

Признаки делимости

Листочек выдавать только после занятия. Занятие построить в форме "вечер воспоминаний". Доказательства признаков вести в форме диалога и без использования алгебры.

Вопросы для вспоминания и самопроверки

1. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25, 50, 100.
2. Почему верны признаки "Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2" и "Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 5" и не верны аналогичные признаки для других однозначных чисел?
3. Почему верен признак "Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное двумя его последним цифрами делится на 4"? Сформулируйте аналогичные признаки делимости для чисел 25 и 50. Что общего у этих чисел с числом 4?

Отщепив хвост, получим число, оканчивающееся на 00. Оно делится на 100, значит и на 4.

4. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 8 и 125.
5. Сформулируйте признаки делимости на 3 и на 9. Почему всякое число вида 10…0 при делении на 9 дает в остатке 1? Верны ли аналогичные признаки для других однозначных чисел?

Раскладываем десяток, сотню, тысячу и т.д. в ящики по 9 штук, остается лишняя штука. Так от каждой цифры остается лишними соответствующее число штук.

6. Какой остаток от деления на 9 дает число вида A0…0? Докажите, что число и его сумма цифр дают при делении на 9 одинаковые остатки. Докажите, что то же верно при делении на 3.
7. Как проверить, делится ли число на а) 6 б) 12 в) 15 г) 18 д) 30 е) 45 ж) 75 з) 225?

Заранее готовим к теме "Разложение на простые множители".

8. Поставим перед каждой цифрой числа знаки плюс и минус по очереди начиная с плюса перед последней цифрой и идя справа налево. Назовем результат **знакопеременной суммой цифр** числа. Например, для числа 1999 это –1+9-9+9=8.

   Докажите, что знакопеременная сумма цифр четырехзначного числа может принимать все целые значения от –18 до +17.

   Знакопеременная сумма цифр – понятие новое, тут полезно чуть-чуть потренироваться.

9. Докажите, что число делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр делится на 11. Какой остаток дает при делении на 11 число вида 10…0, если у него а) четное б) нечетное число нулей?

Раскладываем десяток, сотню, тысячу и т.д. в ящики по 11 штук. От единиц, сотен, десятков тысяч остается лишняя штука, от десятков, тысяч – дырка в ячейке. Кладем лишние яйца в дырки, пока не останутся либо только яйца, либо только дырки. Это и будет знакопеременная сумма цифр.

10. Попробуйте сформулировать признаки делимости на 99 и 101.

Для самостоятельного решения

11. Из двузначного числа вычли число, получающееся из него же перестановкой цифр. Докажите, что результат делится на 9.
12. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 120 раз. Докажите, что в результате получился нуль.
13. Шестиклассник Петя перемножил все числа от 1 до 1998. У полученного числа он посчитал сумму цифр, затем посчитал сумму цифр результата, и так далее, пока не получил число, состоящее из одной цифры. Какое?
14. Натуральное число возвели в квадрат. Может ли результат оканчиваться на 66?
15. Докажите, что число, записываемое 27 единицами, делится на 27.

16. В десятизначном числе все цифры встречаются по разу. Можно ли оно делиться на 11?

Количество информации

Частный, но весьма распространенный тип задач на пример+оценку. Оценка идет через принцип Дирихле и подсчет возможных вариантов, но способ рассуждения требует аккуратности.

1. а) Есть 17 карт. Зритель загадывает одну из них. Фокусник раскладывает все карты на 4 стопки и узнает у зрителя, в какой стопке оказалась задуманная карта. Докажите, что он всегда может определить задуманную карту за 3 вопроса, а двух вопросов может и не хватить. б) При каком наибольшем количестве карт можно наверняка определить задуманную карту за 3 вопроса?

а) При разложении 17 карт на 4 стопки обязательно найдется стопка из не менее чем 5 карт. При невезении зритель выберет ее. При втором делении этих пяти карт найдутся две, которые попадут в одну стопку, и если зритель выберет ее, то карта не угадывается. Двух вопросов может не хватить. За три вопроса: сначала раскладываем карты на стопки по 4, 4, 4 и 5. Затем, если получили в ответ стопку из 4 карт, то перед вторым вопросом раскладываем эти 4 карты в разные стопки. Если же из 5, то разложим по одной в три стопки, и две в четвертую. Если в ответ получаем стопку, куда мы положили одну карту из этих, то все хорошо, иначе понадобится третий вопрос для того, чтобы различить две карты из одной стопки.

б) 64. Сопоставим каждой карте набор из трех чисел от 1 до 4. Таких различных наборов $4\times4\times4=64$. Раскладываем первым вопросом карты на стопки по первому числу, вторым вопросом – по второму числу, третьим – по третьему (это аналогично записи в системе счисления с основанием 4). То, что для 65 карт может не хватить 3 вопросов, доказывается аналогично (а).

2. а) Среди 10 монет есть ровно одна фальшивая (легче остальных). За какое наименьшее число на чашечных весах без гирь ее можно наверняка выявить? б) Среди 5 монет – ровно одна фальшивая: она отличается по весу от остальных, но неизвестно – легче или тяжелее. Требуется выявить ее на чашечных весах без гирь и узнать, легче она или тяжелее настоящей. Какое наименьшее число взвешиваний для этого наверняка хватит?

а) 3. Каждое взвешивание разделяет монеты на 3 части – левая чаша, правая чаша и те, что не участвовали(ср. с делением на стопки). После первого взвешивания при невезении останутся 4 подозрительные монеты, после второго – две, поэтому двух взвешиваний может не хватить. Пример для трех взвешиваний: сначала взвешиваем 3 и 3, оставляя в стороне 4. Далее, если какая-то чаша оказалась легче, то сравниваем две монеты с нее, если получили неравновесие, то фальшивая та, которая легче, иначе – та, которую мы не взвешивали. Если же после первого взвешивания весы в равновесии, то фальшивая среди тех четырех, их взвешиваем по 2, и третьим взвешиванием более легкую чашу разделяем на разные чаши.

б) 3 взвешивания: взвешиваем первую против второй, затем третью против четвертой. Если оба раза – равновесие, то фальшивая – пятая, и сравнив ее с первой, узнаем, легче она или тяжелее. Если в одной из пар – неравновесие, то сравним тяжелую монету из этой пары с пятой. При равновесии фальшивая и более легкая – другая монета пары, при наревновесии – эта тяжелая.

3. а) В выпуклом пятиугольнике проведены все стороны и диагонали. Я загадал одну из этих отрезков. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка угадать его при игре в "Данетки"?

б) Я загадал двоих из 7 присутствующих. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка угадать обоих при игре в "Данетки"?

Ответы: а) за 4; б) за 5 вопросов. Заметить, что предметы от комбинаций ничем не отличаются, важно лишь их количество.

4. а) Каким наименьшим числом гирь можно набрать все веса 1г, 2г, 3г, …, 31г? (гири можно класть только на одну чашку весов)

б) Какое наименьшее число гирь должно быть в наборе, чтобы с его помощью можно было отвесить на чашечных весах веса 1г, 2г,…,13г ? (Гири можно класть на обе чашки весов)

а) 5 гирь. Пример – 1, 2, 4, 8, 16 г. Если гирь меньше: каждому весу от 1 до 31 должно соответствовать какое-то подмножество этих гирь, но таких подмножеств 2^k*-1 (k – число гирь, вычитаем одно пустое подмножество).*

б) 3 гири. Пример – 1, 3, 9 г. Если гирь меньше: каждому весу от 1 до 13 должно соответствовать некоторое разбиение этих гирь на три множества: левая чаша, правая чаша и те, что в стороне. Причем разбиения, полученные друг из друга перестановкой чаш, приводят к одинаковым результатам. Таким образом, над каждой гирей ставится число 0, 1 или 2. Если гири 2, то разбиений $3\times3=9$*, и нужно поделить пополам – учесть перестановки чаш. Если же гири 3, то разбиений* $\frac{3\times3\times3}{2}=13{,}5>13$.

5. Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть два кокосовых ореха. За какое наименьшее число бросков обезьяна может удовлетворить свое любопытство? (Не разбившийся орех можно бросать снова)

За 5 бросков. 1. Бросаем один орех с 5 этажа. Если он разбился, то второй орех бросаем с 1-го, 2-го, 3-го, и 4-го – пока не разобьется. Иначе: 2. Бросаем тот же орех с 9 этажа. Если разбился, пробуем 6, 7, 8 этажи. Иначе: 3. Бросаем тот же орех с 12 этажа. Если разбился, пробуем 10, 11 этажи. Иначе: 4. Бросаем тот же орех с 14 этажа. Если разбился, пробуем 13 этаж. Иначе: 5. Бросаем с 15 этажа.

Для самостоятельного решения

6. Я задумал целое число от 1 до 3. Вы можете задать мне один вопрос, на который я честно должен ответить "Да", "Нет" или "Не знаю", после чего вы должны наверняка отгадать задуманное число. Придумайте такой вопрос.

7. Я задумал три натуральных числа меньше 100. Вы можете попросить умножить первое из них на какое-то ваше число, второе – на какое-то другое ваше число, третье – на какое-то еще ваше число, затем попросить меня сложить эти три произведения и сообщить вам результат. Можете ли вы действовать так, чтобы по этому результату наверняка отгадать все три задуманные числа?

8. а) В гостиницу приехал путешественник. У него вместо денег нашлась лишь серебряная цепочка из 7 звеньев. Хозяин требует платить по одному звену в день без задержек, готов давать сдачу ранее полученными кусками цепочки, но плату вперед брать отказывается. Какое наименьшее число звеньев придется распилить, чтобы можно было расплачиваться все 7 дней? б) То же с 23 звеньями и 23 днями.

Части и проценты

1. Делимое в 6 раз больше делителя, а делитель в 6 раз больше частного. Найдите делимое.

Делимое в 6 раз больше делителя, значит, частное равно 6. Тогда делитель – $6\times6=36$*, а делимое –* $36\times6=216$.

2. Числитель дроби увеличили на 100, а знаменатель – на 1. Могла ли дробь стать меньше?

Да, могла. Пусть сначала была дробь $\frac{900}{1}=900$*, тогда она стала равна* $\frac{900+100}{1+1}=\frac{1000}{2}=500<900$.

3. Известно, что среди философов каждый седьмой – математик, а среди математиков каждый пятый – философ. Кого больше – философов или математиков?

По условию каждый седьмой философ является и философом, и математиком, и каждый пятый математик является и философом, и математиком. Тогда всего математиков в 5 раз больше, чем философо-математиков, а философов – в 7 раз больше того же числа философо-математиков, и их (философов) больше.

4. Предприятие получило задание за два года снизить на 51% объем выпускаемой продукции. Каждый год требуют снижать на одно и то же число процентов. На сколько?

На 30%. Через два года объем продукции должен составить 0,49 от первоначального. Значит, если каждый год выпускать 0,7 от предыдущего, получим то, что нужно.

5. Семеро братьев решили поделить верблюдов. Первый взял себе 1/7 часть стада, второй – 1/6 от оставшегося, третий – 1/5 остатка, четвертый – 1/4 остатка, пятый – 1/3 остатка, шестой – половину, и последний взял оставшихся двух верблюдов. Сколько верблюдов было в стаде?

Анализ с конца: шестой взял половину и оставил 2 верблюда, т. е. до него было 4. Аналогично до пятого – 6, до четвертого – 8, до третьего – 10, до второго – 12, до первого – 14.

6. У одного араба был кувшин молока, у другого – хлеб, у третьего – 6 фиников. За обед третий араб заплатил остальным 20 монет. Как следует разделить эти деньги, если ели поровну, 4 кувшина молока стоят столько же, сколько три 3 хлеба, а один кувшин молока равноценен 36 финикам?

Выразим стоимость продуктов в финиках. Один кувшин молока=36 фиников. Один хлеб равноценен $\frac{4}{3}$ кувшина, т. е. $\frac{4}{3}\times 36 = 48$ фиников. Все ели поровну, значит, каждый получил по $\frac{1}{3}$ кувшина молока, $\frac{1}{3}$ хлеба и 2 финика. Третий араб получил $\frac{1}{3}$ кувшина молока, $\frac{1}{3}$ хлеба и отдал 4 финика и 20 монет. $\frac{1}{3}$ кувшина молока стоит 12 фиников, $\frac{1}{3}$ хлеба стоит 16 фиников, значит, он получил 12+16=28 фиников, а отдал 4 финика и 20 монет, т. е. 20 монет равноценны 28-4=24 финикам. Первый араб получил $\frac{1}{3}$ хлеба, 2 финика и отдал $\frac{2}{3}$ кувшина молока. $\frac{1}{3}$ хлеба стоит 16 фиников, $\frac{2}{3}$ кувшина молока стоит 24 финика, значит, он получил 16+2=18 фиников, а отдал 24 финика. В компенсацию он должен получить 6 фиников, а это равноценно $6\times\frac{20}{24} = 5$ монетам. Значит, остальные 15 монет получит второй араб.

7. М.В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той денежки хотя бы на квас, если цены еще раз вырастут на 20%?

Пусть Х–первоначальная цена хлеба, К–кваса (в денежках). Тогда: Х+К=1 – на одну денежку приобретается хлеб и квас. После повышения хлеб стал стоить 1,2×Х, полхлеба – 0,6×Х, а квас – 1,2×К. Тогда 0,6Х+1,2К=1. Из первого уравнения 0,6Х+0,6К=0,6, вычитаем его из второго, получаем 0,6К=0,4, т. е. квас стоит $\frac{2}{3}$, а хлеб – $\frac{1}{3}$. После нового повышения квас станет стоить 1,2×К×1,2=1,44×К, т. е. 1,44×$\frac{2}{3}$ =0,96, т. е. на квас денежки хватит.

8. Леспромхоз захотел вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил. Он сказал: «99% деревьев в лесу – сосны. Мы будем рубить только их, так, что после вырубки их станет 98%». Какую часть деревьев хочет вырубить леспромхоз?

После вырубки не сосен останется 1% от общего числа до вырубки, и это должно составлять 2% от нового числа, т. е. число деревьев уменьшилось вдвое.

Для самостоятельного решения

9. В отряд пришло 10 новобранцев. Мог ли процент новобранцев увеличиться ровно вдвое?

10. Было два одинаковых стакана, в одном – 200 мл молока, в другом – столько же кофе. Из стакана с молоком перелили 1 чайную ложку (10 мл) молока в кофе, смесь тщательно перемешали, затем перелили такую же чайную ложку смеси обратно в молоко, и снова перемешали. Что больше: процент кофе в молоке, или процент молока в кофе?

11. Произведение нескольких положительных дробей равно 7. Все числители и знаменатели увеличили на 1. Могло ли произведение увеличиться?

12. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

Алгоритмы

Цель: научить придумывать алгоритмы, доказывать их работоспособность, определять конечный результат. Важный момент: отладка алгоритма, т.е. проверка при малых значениях.

1. Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошел отряд солдат. Лодка так мала, что на ней могли переправиться двое мальчиков или только один солдат. Однако солдаты переправились через реку. Как?

Идея повторяемости: цикл по одному солдату. (Крутим ручку шарманки). Отметить, что способ работает при любом числе солдат.

2. По целым точкам числовой оси прыгает кузнечик. Он может прыгать на 3 вперед или на 2 назад. Как ему пропрыгать по числам от 1 до 1000 ровно по одному разу?

Снова цикличность, но здесь уже нужно сгруппировать по 5. Прыгаем так: $1\Rightarrow4\Rightarrow2\Rightarrow5\Rightarrow3\Rightarrow6$. В итоге мы заполнили пятерку и пришли на первую позицию следующей. В доказательстве существенно используется делимость 1000 на 5.

3. Число 1999! заменили на его сумму цифр. Полученное число снова заменили на его сумму цифр, и т.д.

а) Докажите, что рано или поздно получится однозначное число.

б) Найдите это число.

Уменьшение гарантирует завершение алгоритма (число больше суммы своих цифр). Существенно, что промежуточные шаги не отслеживаются, следим только за делимостью на 9 – она не изменяется.. (Едем быстро, по сторонам не смотрим, следим только за дорогой). Получаем, что дойдем до однозначного числа, делящегося на 9. Но это только 9 (если 0, то предыдущее число тоже равно нулю, и т. д.).

4. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске?

Ответ: 50. Предположим, что можно поставить 51. Отследим момент, когда происходит переход с 50 ладей на 51. В этот момент ставится ладья и ни одна не убирается, т. е. ее никто не бьет, значит, и она не бьет ни одну ладью, но тогда остальных ладей 49 (ладья бьет 14 полей и одно занимает). Алгоритм не однозначен. Но важно отследить, чтобы был заявлен порядок заполнения доски, и чтобы это был осуществимый порядок. А вот оценка не должна опираться на алгоритм. Пример: ставим ладью в левый верхний угол, далее "двигаем" ее на нужное поле в правый нижний квадрат 7×7. Получаем заполненный квадрат 7×7 и одна ладья в левом верхнем углу.

5. В строке в беспорядке записаны числа 1, 2,…, 2000.

а) Разрешается менять местами любые два рядом стоящих числа. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.

б) Разрешается менять местами любые два числа, отличающиеся на 1 (например, 7 и 8), где бы они не стояли. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.
в) Каким наименьшим количеством перестановок можно гарантированно обойтись в том и другом случае?
а) Обычно используется пузырьковый алгоритм (берем единицу и двигаем на место, затем двойку, и т. д. На 1 требуется не более, чем n-1 ход, на 2 – не более, чем n-2, и т. д. Общая оценка – $\frac{n(n-1)}{2}$*). Требовать доказательства его завершения. В пункте б) – берем число на первом месте, переставляем его с меньшим на 1, и т. д. – получаем 1 на первом месте. Ответ – тот же. Оценка (в) делается через число беспорядков. Полезно проверить на меньшем количестве чисел.*

6. а) В стране Оз из каждого города выходит по 2 маршрута в другие города страны. Путешественник выехал из столицы, и намерен продолжать путешествие до тех пор, пока ему не придется повторить маршрут. Докажите, что он закончит путешествие в столице.
б) То же, но из каждого города выходит 10 маршрутов.

Проезд по маршруту в обратном направлении тоже считается повторением. Если он повторится раньше, то в повторную точку он ранее вошел и вышел, а затем еще раз зашел – получаем 3 дороги. Значит, это произошло в первой точке. В (б) выбор пути не является, строго говоря, алгоритмом, и вообще, доказательство неконструктивно (из соображений четности).

7. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.
Последовательное улучшение. Небольшая особенность при завершении алгоритма. Возможны попытки использовать повторяемость (красить блоками), наводить на мысль о блоках помельче. Решение: рассмотрим путь, проходящий по всем клеткам доски. Пустим маляра вперед по этому пути. Пусть маляр оглядывается по прохождении каждой клетки и смотрит, в нужный ли цвет она покрашена. Если в нужный – все нормально, идем дальше. Иначе возвращаемся назад, перекрашиваем ее и снова идем вперед. Так мы сможем покрасить все, кроме последних двух клеток – с ними можно разобраться отдельно.

Для самостоятельного решения

8. Если на доске записано число А, к нему можно прибавить любой его собственный делитель (отличный от 1 и самого А). Доказать, что из А=4 можно получить любое составное число.

9. В прямоугольнике 3×100 расставлены фишки трех цветов по 100 штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.

10. На некоторых клетках шахматной доски 100×100 стоят ладьи. Докажите, что их можно раскрасить в три цвета так, чтобы ладьи одинакового цвета друг друга не били.

Задачи на движение

1. Минуткин обычно заводил часы до отказа два раза в сутки: утром в 8 ч 30 мин и ночью, ложась спать. Утром приходилось делать 9 полных оборотов головки часов, а ночью – 11. В котором часу ложился спать Минуткин?
Ответ скорее всего будет дан наоборот. Обратить внимание.

2. Лошадь съедает копну сена за 2 суток, корова за 3, овца - за 6 суток. За какое время съедят копну сена лошадь, корова и овца вместе?

Посчитать совместную скорость.

3. Андрей ведет машину со скоростью 60 км/ч. Он хочет проезжать каждый километр на 1 минуту быстрее. На сколько ему следует увеличить скорость?

Ответ: Все равно не получится, так как он уже на километр тратит только минуту времени.

4. Поезд проходит (считая с момента, когда поезд начал въезжать на мост, до момента, когда он целиком съехал с него) мост длиной 450 метров за минуту и полминуты идёт мимо телеграфного столба. Найти длину и скорость поезда.

Поставим столб в конце моста. Тогда за полминуты паровоз проедет мост, а оставшиеся полминуты поезд будет с моста съезжать.

5. Два охотника отправились одновременно навстречу друг другу из двух деревень, расстояние между которыми 18 км. Первый шел со скоростью 5 км/ч, а второй – 4 км/ч. Первый охотник взял с собой собаку, которая бежала со скоростью 8 км/ч. Собака сразу же побежала навстречу второму охотнику, встретила его, тявкнула, повернула и с той же скоростью побежала навстречу хозяину, и так далее. Так она бегала до тех пор, пока охотники не встретились. а) Сколько раз тявкнула собака? б) Сколько километров она пробежала?

Собака тявкнула бесконечно много раз, а вычислять бесконечную сумму неудобно, зато легко считается через скорость и время.

6. Группа туристов должна была прибыть на вокзал в 5 ч. К этому времени с турбазы за ними должен был прийти автобус. Однако, прибыв на вокзал в 3 ч 20 минут, туристы пошли пешком на турбазу. Встретив на дороге автобус, они сели в него и прибыли на турбазу на 20 минут раньше предусмотренного времени. С какой скоростью шли туристы до встречи с автобусом, если скорость автобуса 60 км/ч.

Туристы сэкономили 20 минут, за это время автобус дважды проехал бы путь, который они прошли, а шли они полчаса.

7. Простак и Хитрец спускались на эскалаторе. Посередине Хитрец сорвал с Простака шапку и бросил ее на встречный эскалатор. Простак побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься и вернуть шапку, а Хитрец вниз, чтобы потом подняться вверх и опередить Простака. Кто первый схватит шапку, если скорости их относительно эскалатора одинаковы, постоянны и не зависят от направления движения?

Если представить эскалатор как замкнутую ленту, двигающуюся по кругу, то Хитрец бросил шапку на противоположную точку ленты, а затем они побежали по этой ленте разными, но равными по длине путями.

8. Пароход шел от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно 7 суток. Сколько времени плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

Пусть одновременно из Нижнего вышли плоты и пароход. Если за систему отсчета взять воду, то за пять суток пароход отплыл от плотов, а затем за пять суток к ним вернулся. То есть за 10 суток плоты прошли столько, сколько пароход за 2 суток проходит против течения, следовательно плоты будут в пути 35 суток. Основная идея: сменить систему отсчета.

Для самостоятельного решения:

9. Пловец плывет вверх против течения Невы. Возле Республиканского моста он потерял пустую фляжку. Проплыв еще 20 минут против течения он заметил потерю и вернулся догонять флягу; догнал он ее возле моста лейтенанта Шмидта. Какова скорость течения Невы, если расстояние между мостами равно 2 км?

10. Пешеход шел 3,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/час?

11. Трус, Балбес и Бывалый в три аппарата гонят самогон. Трус выгоняет бутыль самогона крепостью a градусов за a часов, такую же бутыль Балбес наполняет самогоном крепости b градусов за b часов, а Бывалый – крепости c градусов за c часов. Для ускорения процесса все трое направили шланги в одну бутыль и наполнили ее за сутки. Какова крепость полученного самогона?

12. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов может его выпить за 1 день, а стадо из 37 слонов - за 5 дней. Может ли выпить это озеро один слон, и если да, то за сколько дней?

Принцип крайнего

Я самый, самый, самый, самый …

Дети будут пытаться применять процесс постепенного увеличения или уменьшения, и показывать, что процесс затыкается. Это нормально и правильно. Но потом им надо показать, что рассмотрев сразу то место, где процесс заткнется, мы сильно сэкономим.

1. В отряде 6 класса прошло соревнование по перетягиванию каната, в результате все оказались занесены в список по убыванию силы. Вячеслав Александрович задумался: верно ли, что любые трое перетянут любых двоих. За сколько перетягиваний он сможет это установить?

Достаточно проверить только крайний случай: двое самых сильных против троих самых слабых.

2. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьет не более двух других.

Угловой ладьи может и не быть. Но посмотрим на самую верхнюю среди самых левых.

3. По кругу выписаны несколько чисел, каждое равно полусумме двух соседних. Докажите, что все числа равны.

Обсудить, что на числовой оси полусумма – это середина отрезка. Иначе говоря, если числа не равны, то полусумма лежит между ними. А теперь возьмем самое большое (если таких несколько подряд – то самое крайнее среди них). Оно явно не лежит между.

4. Шахматная доска разбита на домино. Докажите, что какая-то пара домино образует квадратик 2×2.

Строим от края: предполагаем противное, и начинаем строить лесенку, начиная с угла. Если квадратика нет, то упремся.

5. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 50 грибов.

Ключевая фигура: самый неудачливый среди тройки самых удачливых. Если у него не менее 16, то у тройки – не менее 16+17+18=51. Если у него менее 16, то у оставшейся четверки – не более 14+13+12+11, то есть не более 50, значит у тройки – не менее 50.

6. Кубик Рубика $3\times3\times3$ надо распилить на единичные кубики. После распила части можно перекладывать и прикладывать так, чтобы можно было пилить несколько частей одновременно. Докажите, что понадобится не менее 6 прямых распилов.

Самый вредный – центральный кубик, его придется отпиливать 6 раз.

7. Можно ли на клетчатой бумаге обвести по линиям сетки два квадрата так, чтобы площадь первого была ровно вдвое меньше площади второго?

Нельзя. Если можно, то возьмем минимальный пример меньшего квадрата. Сторона большего, очевидно, четна. Если и сторона меньшего четна, взяв ячейки вдвое крупнее, пример уменьшим. Если сторона меньшего нечетна, то площадь его нечетна, и площадь большего не делится на 4. Но это невозможно.

8. Известно, что если у двух жителей Вишкиля поровну знакомых среди односельчан, то общих знакомых у них нет. Докажите, что найдется житель, у которого ровно один знакомый односельчанин.

Назовем число знакомых степенью. Условие означает, что у любого жителя степени всех знакомых различны. Возьмем теперь самого общительного. Его степень n. Среди его знакомых должны встретиться все степени от 1 до n, иначе будут повторы. Значит, есть житель степени 1.

Для самостоятельного решения

9. Путешественник отправился из своего родного города А в самый удаленный от него город страны Б, оттуда – в самый удаленный от Б город В и т.д. Докажите, что если В и А – разные города, то путешественник никогда не вернется домой.

10. У геолога есть чашечные весы без гирь и 8 камней. Он хочет знать, верно ли, что два камня всегда тяжелее одного. Как ему гарантированно проверить это а) за 19 взвешиваний; б) за 13 взвешиваний?

11. В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую. Докажите, что можно так выбрать станцию и закрыть ее на ремонт (без права проезда через нее), что по прежнему можно будет проехать с любой оставшейся на любую оставшуюся.

12. На полях шахматной доски расставлены числа 1, 2, …, 64. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, где числа отличаются не меньше, чем на 5.