Принцип крайнего

Я самый, самый, самый, самый …

Дети будут пытаться применять процесс постепенного увеличения или уменьшения, и показывать, что процесс затыкается. Это нормально и правильно. Но потом им надо показать, что рассмотрев сразу то место, где процесс заткнется, мы сильно сэкономим.

1. В отряде 6 класса прошло соревнование по перетягиванию каната, в результате все оказались занесены в список по убыванию силы. Вячеслав Александрович задумался: верно ли, что любые трое перетянут любых двоих. За сколько перетягиваний он сможет это установить?

Достаточно проверить только крайний случай: двое самых сильных против троих самых слабых.

2. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьет не более двух других.

Угловой ладьи может и не быть. Но посмотрим на самую верхнюю среди самых левых.

3. По кругу выписаны несколько чисел, каждое равно полусумме двух соседних. Докажите, что все числа равны.

Обсудить, что на числовой оси полусумма – это середина отрезка. Иначе говоря, если числа не равны, то полусумма лежит между ними. А теперь возьмем самое большое (если таких несколько подряд – то самое крайнее среди них). Оно явно не лежит между.

4. Шахматная доска разбита на домино. Докажите, что какая-то пара домино образует квадратик 2×2.

Строим от края: предполагаем противное, и начинаем строить лесенку, начиная с угла. Если квадратика нет, то упремся.

5. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 50 грибов.

Ключевая фигура: самый неудачливый среди тройки самых удачливых. Если у него не менее 16, то у тройки – не менее 16+17+18=51. Если у него менее 16, то у оставшейся четверки – не более 14+13+12+11, то есть не более 50, значит у тройки – не менее 50.

6. Кубик Рубика $3\times3\times3$ надо распилить на единичные кубики. После распила части можно перекладывать и прикладывать так, чтобы можно было пилить несколько частей одновременно. Докажите, что понадобится не менее 6 прямых распилов.

Самый вредный – центральный кубик, его придется отпиливать 6 раз.

7. Можно ли на клетчатой бумаге обвести по линиям сетки два квадрата так, чтобы площадь первого была ровно вдвое меньше площади второго?

Нельзя. Если можно, то возьмем минимальный пример меньшего квадрата. Сторона большего, очевидно, четна. Если и сторона меньшего четна, взяв ячейки вдвое крупнее, пример уменьшим. Если сторона меньшего нечетна, то площадь его нечетна, и площадь большего не делится на 4. Но это невозможно.

8. Известно, что если у двух жителей Вишкиля поровну знакомых среди односельчан, то общих знакомых у них нет. Докажите, что найдется житель, у которого ровно один знакомый односельчанин.

Назовем число знакомых степенью. Условие означает, что у любого жителя степени всех знакомых различны. Возьмем теперь самого общительного. Его степень n. Среди его знакомых должны встретиться все степени от 1 до n, иначе будут повторы. Значит, есть житель степени 1.