Алгоритмы

Цель: научить придумывать алгоритмы, доказывать их работоспособность, определять конечный результат. Важный момент: отладка алгоритма, т.е. проверка при малых значениях.

1. Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошел отряд солдат. Лодка так мала, что на ней могли переправиться двое мальчиков или только один солдат. Однако солдаты переправились через реку. Как?

Идея повторяемости: цикл по одному солдату. (Крутим ручку шарманки). Отметить, что способ работает при любом числе солдат.

2. По целым точкам числовой оси прыгает кузнечик. Он может прыгать на 3 вперед или на 2 назад. Как ему пропрыгать по числам от 1 до 1000 ровно по одному разу?

Снова цикличность, но здесь уже нужно сгруппировать по 5. Прыгаем так: $1\Rightarrow4\Rightarrow2\Rightarrow5\Rightarrow3\Rightarrow6$. В итоге мы заполнили пятерку и пришли на первую позицию следующей. В доказательстве существенно используется делимость 1000 на 5.

3. Число 1999! заменили на его сумму цифр. Полученное число снова заменили на его сумму цифр, и т.д.

а) Докажите, что рано или поздно получится однозначное число.

б) Найдите это число.

Уменьшение гарантирует завершение алгоритма (число больше суммы своих цифр). Существенно, что промежуточные шаги не отслеживаются, следим только за делимостью на 9 – она не изменяется.. (Едем быстро, по сторонам не смотрим, следим только за дорогой). Получаем, что дойдем до однозначного числа, делящегося на 9. Но это только 9 (если 0, то предыдущее число тоже равно нулю, и т. д.).

4. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске?

Ответ: 50. Предположим, что можно поставить 51. Отследим момент, когда происходит переход с 50 ладей на 51. В этот момент ставится ладья и ни одна не убирается, т. е. ее никто не бьет, значит, и она не бьет ни одну ладью, но тогда остальных ладей 49 (ладья бьет 14 полей и одно занимает). Алгоритм не однозначен. Но важно отследить, чтобы был заявлен порядок заполнения доски, и чтобы это был осуществимый порядок. А вот оценка не должна опираться на алгоритм. Пример: ставим ладью в левый верхний угол, далее "двигаем" ее на нужное поле в правый нижний квадрат 7×7. Получаем заполненный квадрат 7×7 и одна ладья в левом верхнем углу.

5. В строке в беспорядке записаны числа 1, 2,…, 2000.

а) Разрешается менять местами любые два рядом стоящих числа. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.

б) Разрешается менять местами любые два числа, отличающиеся на 1 (например, 7 и 8), где бы они не стояли. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.

в) Каким наименьшим количеством перестановок можно гарантированно обойтись в том и другом случае?

а) Обычно используется пузырьковый алгоритм (берем единицу и двигаем на место, затем двойку, и т. д. На 1 требуется не более, чем n-1 ход, на 2 – не более, чем n-2, и т. д. Общая оценка – $\frac{n(n-1)}{2}$*). Требовать доказательства его завершения. В пункте б) – берем число на первом месте, переставляем его с меньшим на 1, и т. д. – получаем 1 на первом месте. Ответ – тот же. Оценка (в) делается через число беспорядков. Полезно проверить на меньшем количестве чисел.*

6. а) В стране Оз из каждого города выходит по 2 маршрута в другие города страны. Путешественник выехал из столицы, и намерен продолжать путешествие до тех пор, пока ему не придется повторить маршрут. Докажите, что он закончит путешествие в столице. б) То же, но из каждого города выходит 10 маршрутов.

Проезд по маршруту в обратном направлении тоже считается повторением. Если он повторится раньше, то в повторную точку он ранее вошел и вышел, а затем еще раз зашел – получаем 3 дороги. Значит, это произошло в первой точке. В (б) выбор пути не является, строго говоря, алгоритмом, и вообще, доказательство неконструктивно (из соображений четности).

7. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.
   Последовательное улучшение. Небольшая особенность при завершении алгоритма. Возможны попытки использовать повторяемость (красить блоками), наводить на мысль о блоках помельче. Решение: рассмотрим путь, проходящий по всем клеткам доски. Пустим маляра вперед по этому пути. Пусть маляр оглядывается по прохождении каждой клетки и смотрит, в нужный ли цвет она покрашена. Если в нужный – все нормально, идем дальше. Иначе возвращаемся назад, перекрашиваем ее и снова идем вперед. Так мы сможем покрасить все, кроме последних двух клеток – с ними можно разобраться отдельно.