Количество информации

Частный, но весьма распространенный тип задач на пример+оценку. Оценка идет через принцип Дирихле и подсчет возможных вариантов, но способ рассуждения требует аккуратности.

1. а) Есть 17 карт. Зритель загадывает одну из них. Фокусник раскладывает все карты на 4 стопки и узнает у зрителя, в какой стопке оказалась задуманная карта. Докажите, что он всегда может определить задуманную карту за 3 вопроса, а двух вопросов может и не хватить. б) При каком наибольшем количестве карт можно наверняка определить задуманную карту за 3 вопроса?

Решение. *а) При разложении 17 карт на 4 стопки обязательно найдется стопка из не менее чем 5 карт. При невезении зритель выберет ее. При втором делении этих пяти карт найдутся две, которые попадут в одну стопку, и если зритель выберет ее, то карта не угадывается. Двух вопросов может не хватить. За три вопроса: сначала раскладываем карты на стопки по 4, 4, 4 и 5. Затем, если получили в ответ стопку из 4 карт, то перед вторым вопросом раскладываем эти 4 карты в разные стопки. Если же из 5, то разложим по одной в три стопки, и две в четвертую. Если в ответ получаем стопку, куда мы положили одну карту из этих, то все хорошо, иначе понадобится третий вопрос для того, чтобы различить две карты из одной стопки.*

б) 64. Сопоставим каждой карте набор из трех чисел от 1 до 4. Таких различных наборов 4×4×4=64. Раскладываем первым вопросом карты на стопки по первому числу, вторым вопросом – по второму числу, третьим – по третьему (это аналогично записи в системе счисления с основанием 4). То, что для 65 карт может не хватить 3 вопросов, доказывается аналогично (а).

2. а) Среди 10 монет есть ровно одна фальшивая (легче остальных). За какое наименьшее число на чашечных весах без гирь ее можно наверняка выявить? б) Среди 5 монет – ровно одна фальшивая: она отличается по весу от остальных, но неизвестно – легче или тяжелее. Требуется выявить ее на чашечных весах без гирь и узнать, легче она или тяжелее настоящей. Какое наименьшее число взвешиваний для этого наверняка хватит?

Решение. *а) 3. Каждое взвешивание разделяет монеты на 3 части – левая чаша, правая чаша и те, что не участвовали(ср. с делением на стопки). После первого взвешивания при невезении останутся 4 подозрительные монеты, после второго – две, поэтому двух взвешиваний может не хватить. Пример для трех взвешиваний: сначала взвешиваем 3 и 3, оставляя в стороне 4. Далее, если какая-то чаша оказалась легче, то сравниваем две монеты с нее, если получили неравновесие, то фальшивая та, которая легче, иначе – та, которую мы не взвешивали. Если же после первого взвешивания весы в равновесии, то фальшивая среди тех четырех, их взвешиваем по 2, и третьим взвешиванием более легкую чашу разделяем на разные чаши.*

б) 3 взвешивания: взвешиваем первую против второй, затем третью против четвертой. Если оба раза – равновесие, то фальшивая – пятая, и сравнив ее с первой, узнаем, легче она или тяжелее. Если в одной из пар – неравновесие, то сравним тяжелую монету из этой пары с пятой. При равновесии фальшивая и более легкая – другая монета пары, при наревновесии – эта тяжелая.

3. а) В выпуклом пятиугольнике проведены все стороны и диагонали. Я загадал одну из этих отрезков. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка угадать его при игре в "Данетки"?

   б) Я загадал двоих из 7 присутствующих. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка угадать обоих при игре в "Данетки"?

   Ответы*: а) за 4; б) за 5 вопросов. Заметить, что предметы от комбинаций ничем не отличаются, важно лишь их количество.*

4. а) Каким наименьшим числом гирь можно набрать все веса 1г, 2г, 3г, …, 31г? (гири можно класть только на одну чашку весов)

   б) Какое наименьшее число гирь должно быть в наборе, чтобы с его помощью можно было отвесить на чашечных весах веса 1г, 2г,…,13г ? (Гири можно класть на обе чашки весов)

Решение. *а) 5 гирь. Пример – 1, 2, 4, 8, 16 г. Если гирь меньше: каждому весу от 1 до 31 должно соответствовать какое-то подмножество этих гирь, но таких подмножеств 2^k-1 (k – число гирь, вычитаем одно пустое подмножество).*

б) 3 гири. Пример – 1, 3, 9 г. Если гирь меньше: каждому весу от 1 до 13 должно соответствовать некоторое разбиение этих гирь на три множества: левая чаша, правая чаша и те, что в стороне. Причем разбиения, полученные друг из друга перестановкой чаш, приводят к одинаковым результатам. Таким образом, над каждой гирей ставится число 0, 1 или 2. Если гири 2, то разбиений 3×3=9, и нужно поделить пополам – учесть перестановки чаш. Если же гири 3, то разбиений $\frac{3\times 3\times 3}{2} = 13{,}5 > 13$.

5. Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть два кокосовых ореха. За какое наименьшее число бросков обезьяна может удовлетворить свое любопытство? (Не разбившийся орех можно бросать снова)

Решение. *За 5 бросков. 1. Бросаем один орех с 5 этажа. Если он разбился, то второй орех бросаем с 1-го, 2-го, 3-го, и 4-го – пока не разобьется. Иначе: 2. Бросаем тот же орех с 9 этажа. Если разбился, пробуем 6, 7, 8 этажи. Иначе: 3. Бросаем тот же орех с 12 этажа. Если разбился, пробуем 10, 11 этажи. Иначе: 4. Бросаем тот же орех с 14 этажа. Если разбился, пробуем 13 этаж. Иначе: 5. Бросаем с 15 этажа.*