Постепенное конструирование

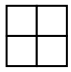
Если забор не удается перепрыгнуть, попробуйте через него перелезть…

1. а) Придумайте 3 различных натуральных числа, чтобы каждое делило сумму остальных; **б)** то же, но все числа больше 100; **в)** как в (а), но 4 числа; **г)** как в (а), но 10 чисел.

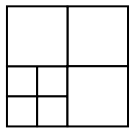
***Решение: а)**, **б)** 100, 200, 300. **в)** Если уже построен набор из n чисел, то к ним можно добавить (n+1)-ое число – их сумму, т. к. она делится на каждое из этих n чисел и ее прибавление к набору из (n–1)-го числа не изменяет их делимости на оставшееся. Таким образом, получаем, например, ряд 1, 2, 3, 6, 12, 24, и т. д.*

2. Разрежьте квадрат на n меньших квадратов (не обязательно одинаковых) **а)** n=4; **б)** n=7; **в)** n=10; **г)** n=1999.

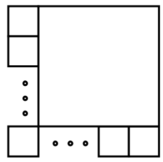
Решения см. на рисунках справа



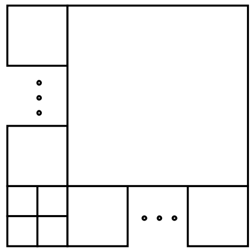
n=4



n=7



n=любое четное, начиная с 4



n=любое нечетное, начиная с 7

3. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы без гирь, отмерить 9 кг гвоздей?

***Решение:** Мы можем разделить 24 кг на 2 группы по 12 кг, затем одну из них – на 2 группы по 6, затем одну из них – на 2 группы по 3 и сложить группы 3 и 6.*

4. Давным-давно в СССР имелись в обращении 3-копеечные и 5-копечные монеты. Докажите, что можно было набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

***Решение:** Если число делится на 3, набираем требуемую сумму монетами по 3 копейки – так можно получить 3, 6, 9, 12,… Если число дает остаток 2 по модулю 3, то берем одну пятикопеечную и необходимое количество трехкопеечных – получаем 5, 8, 11, и т. д. Если число дает остаток 1 по модулю 3, берем 2 монеты по 5 и остальное дополняем трехкопеечными – получаем 10, 13, 16, …Видно, что можно получить любое число, кроме 1, 2, 4 и 7.*

5. Представьте число 1 в виде суммы **а)** трех **б)** четырех **в)** десяти различных дробей с числителем 1.

***Решение: а)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Дальнейшие примеры получается следующим образом: берем самую маленькую дробь, и если ее знаменатель – четное число, равное 2a, то разбиваем эту дробь на две: $\frac{1}{2a}=\frac{1}{3a}+\frac{1}{6a}$. Замечаем, что в итоге получаем наименьшую дробь с четным знаменателем (6a), то есть процесс можно продолжить.*

6. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

***Решение:** рассмотрим путь, проходящий по всем клеткам доски. Пустим маляра вперед по этому пути. Пусть маляр оглядывается по прохождении каждой клетки и смотрит, в нужный ли цвет она покрашена. Если в нужный – все нормально, идем дальше. Иначе возвращаемся назад, перекрашиваем ее и снова идем вперед. Так мы сможем покрасить все, кроме последних двух клеток – с ними можно разобраться отдельно.*

Для самостоятельного решения

7. При каких натуральных n можно разрезать квадрат на n меньших квадратов (не обязательно одинаковых)?

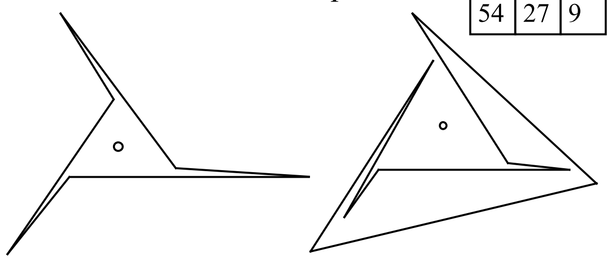
Решение: *Выше приведены примеры для n=1, 4, и всех, начиная с 6. Остается 2, 3 и 5. Невозможность разрезания на 2 и 3 очевидна. Для n=5 устраиваем перебор: 4 квадрата должны располагаться в углах, пятый обязан примыкать к какой-то стороне, дальше – просто.*

8. Расставьте различные натуральные числа в таблицу 2×3 (2 строки, 3 столбца) так, чтобы произведения в столбцах были равны, и суммы в строках тоже были равны (но суммы могут отличаться от произведений).

Решение: *Сначала расставляем любые числа так, чтобы произведения в столбцах были равны. Затем, если умножить все числа в одной строке на любое натуральное число, то произведения останутся равными.*

10	20	60
54	27	9

9. а) Может ли свеча внутри пустой многоугольной комнаты не освещать полностью ни одну из стен? **б)** Существует ли многоугольник и точка вне него, из которой ни одной стороны не видно полностью?



Решение: *Может, см. рисунки.*

10. У входа в пещеру с сокровищами стоит бочка с 4 дырками по кругу в крышке. В каждой дырке можно нащупать селедку хвостом вверх или вниз. Али-Баба может просунуть руки в любые две дырки, определить положение селедок под ними и, если хочет, перевернуть одну или обе по своему усмотрению. Когда хвосты всех четырех селедок окажутся направленными в одну сторону, дверь в пещеру откроется. Однако, после того, как Али-Баба вытаскивает руки, бочка некоторое время с дикой скоростью крутится, так что Али-Баба не может определить, куда именно он совал руки раньше. Как Али-Бабе открыть дверь не более чем за 10 засовываний?

Решение*: 1. Засовываем руки в 2 соседних дырки и делаем так, чтобы там обе селедки находились хвостами вверх. 2. Засовываем руки в 2 дырки по диагонали и делаем так, чтобы там обе селедки находились хвостами вверх. Если дверь еще не открылась, то получаем ситуацию, изображенную на рисунке 1 (с точностью до поворота).*

○ – хвост вниз

● – хвост вверх

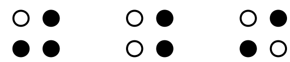


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

3. Засовываем руки по диагонали. Если одна из селедок хвостом вверх, а другая – вниз, то переворачиваем вверх ту, которая была вниз, и дверь открывается. Если обе – вверх, то переворачиваем одну из них хвостом вниз и получаем ситуацию, изображенную на рисунке 2.

4. Засовываем руки в соседние дырки. Если там селедки имеют одинаковое направление хвостов, то переворачиваем обе и дверь открывается. Иначе – тоже переворачиваем обе и получаем ситуацию на рисунке 3.

5. Засовываем руки по диагонали и переворачиваем обе селедки. В итоге все четыре селедки оказываются направленными в одну сторону, и дверь открывается.