

## ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

1. В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.  
*Решение:* Предположим, что в каждом классе не более 33 учеников, тогда всего в школе не более  $33 \times 30 = 990$  учеников. Противоречие.
2. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежали яблоки одного сорта. Найдутся ли 9 ящиков одного сорта?  
*Решение:* Предположим, что не найдутся, то есть яблок каждого сорта не более, чем 8, тогда всего ящиков не более, чем 24, что противоречит условию.
3. Докажите, что среди любых 11 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 10.  
*Решение:* Рассмотрим последние цифры этих чисел. Так как всего чисел 11, а различных цифр 10, то найдется два числа с одинаковой последней цифрой. Их разность будет делиться на 10.
4. Можно ли расставить на шахматной доске 17 королей так, чтобы они не били друг друга?  
*Решение:* Нет. Разделим доску на 16 клеток  $2 \times 2$ . Тогда в одной из клеток обязательно окажется 2 короля, которые будут бить друг друга.
5. Пятнадцать мальчиков собрали вместе сто орехов. Докажите, что какие-то двое из них собрали одинаковое количество орехов.  
*Решение:* Предположим, что они собрали попарно различное количество орехов. Расположим их по возрастанию этого количества. Тогда 2-й мальчик собрал не менее 1 ореха, 3-й – не менее 2-х, и т.д., 15-й – не менее 14-ти. Тогда вместе они собрали не менее 105 орехов, что противоречит условию.
6. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу.  
*Решение:* Подсчитаем пары друзей. У каждого из них 9 друзей, умножить на 10 человек и разделить на 2, так как каждая пара таким образом посчитана дважды, получается 45 пар, а открыток всего 50, следовательно на какую-то пару придется не менее двух открыток, то есть друзья обменяются открытками.
7. Докажите, что в любой момент однокругового чемпионата найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.  
*Решение:* Пусть на какой-то момент времени все  $n$  команд сыграли различное количество матчей. Но так как команда не может сыграть больше, чем  $n-1$  матч, то всего различных вариантов количества сыгранных матчей  $n$  (от 0 до  $n-1$ ). Тогда получается, что команды сыграли соответственно 0, 1, 2, ...,  $n-1$  матч. Но тогда команда, сыгравшая  $n-1$  матч должна была сыграть со всеми, то есть нет команд, сыгравших 0 матчей. Противоречие.

### Для самостоятельного решения

8. В ковре размером  $4 \times 4$  метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать коврик размера  $1 \times 1$  метр, в котором нет ни одной дырки.  
*Решение:* Разрежем ковер на 16 ковриков размером  $1 \times 1$ , тогда на один из них не хватит дырки.
9. Докажите, что среди любых 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.  
*Решение:* Выберем какого-нибудь человека, скажем Петю. У тогда из остальных пяти либо найдутся трое знакомых с Петей, либо незнакомых с ним. Без ограничения общности рассмотрим первый случай. Если эти трое незнакомы друг с другом, то

*задача решена, а если среди них есть пара знакомых, то вместе с Петей они и составляют искомую тройку.*

- 10.** На шахматной доске стоит 31 фишка. Докажите, что найдется свободный уголок из трех клеток.

*Решение: Разрежем доску на 16 квадратов  $2 \times 2$ . Тогда в какой-то из них попадет не более одной фишки и, значит, поместится уголок из трех клеток.*

[www.ashap.info/Uroki/KirovLMSH/1999/index.html](http://www.ashap.info/Uroki/KirovLMSH/1999/index.html)