Четность

Идея занятия: четность, важное свойство, которое легко отслеживать, и которое позволяет отсекать невозможные случаи.

1. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 19995?

   Ответ: нет, т. к. 19995 – число нечетное. Если исходные два числа имеют одинаковую четность, то их разность четна, иначе одно из них четное.

2. Можно ли разменять 25 тугриков десятью купюрами достоинством в 1, 3 и 5 тугриков?

   Ответ: нет, т. к. сумма четного числа нечетных чисел четна.

3. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция закричала "Это обман!". Почему?

   Ответ: если сумма двух чисел четна, то их разность – тоже.

4. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей разного пола четно.

   Решение: если пойти по часовой стрелке, начав с какого-нибудь мальчика, то количество "переходов" с мальчика на девочку и с девочки на мальчика должно быть одинаковое, т. е. общее количество "переходов" (= разнополых пар) четно.

5. **Лемма о рукопожатиях**. Докажите, что общее число участников ЛМШ99, совершивших с другими участниками нечетное число рукопожатий, четно.

   Решение: Сумма количеств рукопожатий по всем людям четна, поскольку равна удвоенному числу всех рукопожатий. А если число нечетных людей было нечетно, то и сумма по людям была бы нечетной.

   Эта лемма очень важна. Рукопожатиями можно промоделировать любые симметричные отношения. Приведите детям другие примеры, скажем, количество монет, лежащих на столе и касающихся нечетного числа других монет – четно.

6. На шахматной доске стоят 11 шашек, расположенных симметрично относительно большой диагонали. Докажите, что есть шашка или шашки и на большой диагонали.

   Решение: Шашки, не стоящие на большой диагонали, можно разбить на пары симметричных друг другу, значит, их четное число.

   Отметить, что четность – близкий друг симметрии.

7. а) На столе лежит 21 монета решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть любые 20 монет. Можно ли за несколько операций добиться, чтобы все монеты легли орлом вверх? б) Тот же вопрос, если монет 20, а разрешается переворачивать по 19.

   Решение: а) число монет, лежащих орлом вверх, четно в начале и не меняет четность при указанной операции; б) перевернем все монеты, кроме первой, затем все, кроме второй, и т. д. – всего 20 раз. В итоге каждая монета перевернется по 19 раз, значит, все будут лежать орлом вверх.

   Надо упомянуть об инварианте (не напирая на слово) – то есть неизменном свойстве.

Для самостоятельного решения

8. Состоялось заседание руководителей 15 республик бывшего Советского Союза. Резидент одной из разведок сообщил, что каждый руководитель заключил тайное соглашение ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

   Решение: нет, в графе четное число вершин нечетной степени (сравни с леммой о рукопожатиях).

9. * В клетчатом квадрате, разрезая по границам клеток, прорезали квадратную дырку поменьше. Может ли оставшаяся фигура состоять ровно из 250 клеток?

Решение: Нет. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. *Если a и b одной четности, то (a+b) и (a-b) оба четные, и разность квадратов делится на 4, иначе (a+b) и (a-b) оба нечетные и разность квадратов нечетна.*

10. * Докажите, что число способов расставить на доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга – четно.

Решение: проведем симметрию относительно вертикальной прямой, делящей доску пополам. Если какая-то позиция перешла в себя, то в ней 2 ферзя стоят на одной горизонтали, и, следовательно, бьют друг друга. Значит, такой позиции нет и все они разбиваются на пары.