

КОНСТРУКЦИИ НА МНОГО-МАЛО

Что не запрещено, то разрешено!

Если надо выигрывать чаще, а силы равны, то надо много раз выиграть по чуть-чуть, а проиграть много, но один раз.

0. На одну чашку весов кладется пять десятикопеечных монет, а на другую – равная по массе пачка стодолларовых купюр. Будут ли весы в равновесии?

Задача-шутка, напоминающая, что много и мало – понятия относительные.

1. Может ли и сумма, и произведение нескольких натуральных чисел быть равными 99?

Ответ: Например, 9, 11 и 79 раз по 1.

2. Площадь прямоугольника меньше 1 кв.дм. Может ли его периметр быть больше 1 км?

Ответ: Да, пусть стороны равны 500 м и $\frac{1}{100000}$ м.

3. На балу было юношей и девушек поровну, было 10 танцев и каждый раз танцевали все.

а) Как могло получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал либо с более красивой, либо с более умной девушкой?

Ответ: Пусть на балу 2 юноши и 2 девушки, причем вторая красивее, а первая – умнее.

б) Как могло получиться, что в дополнение к тому в каждом танце (начиная со второго) был юноша, который танцевал и с более красивой, и с более умной девушкой?

Ответ: Пусть на балу 3 юноши и 3 девушки А, Б и В, причем красота возрастает в порядке АБВ, а ум – в порядке БАА. Юноши чередуют девушек по кругу в порядке АБВ. Задача (б) – трудная, ее можно большинству рекомендовать пропустить и порешать дома.

4. Сумма положительных чисел больше 10. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?

Ответ: Возьмем 10001 число, все равны $\frac{1}{1000}$, тогда их сумма равна 10,001, а сумма

квадратов – $\frac{10001}{1000000}$.

Указание: разберите, как ведет себя сумма квадратов при разбиении числа на сумму двух равных.

5. Раз в месяц директор фирмы предлагает трем своим заместителям проголосовать за новый список своей и их зарплат. Сам директор не голосует. Те заместители, чью зарплату предлагается увеличить, голосуют за, остальные – против. Предложение принимается большинством голосов. Может ли директор за год добиться, чтобы его зарплата вдесятеро увеличилась, а зарплаты всех заместителей вдесятеро уменьшились?

Ответ: Например, так: сначала увеличим зарплату директора в 10 раз, двум заместителям добавим по чуть-чуть, а у третьего уменьшим в 100 раз. Во втором месяце добавим по чуть-чуть первому и третьему, и уменьшим в 100 раз у второго. В третьем месяце аналогично уменьшим первого. Далее можно понемногу прибавлять всем, но так, чтобы у заместителей было меньше, чем $\frac{1}{10}$ от первоначальной зарплаты.

Мораль: на жадину не нужен нож...

6. На занятии Вася, Леня и Стас решили все задачи. Может ли оказаться, что на Стас большинство задач решил раньше Лени, Леня – большинство раньше Васи, а Вася – большинство раньше Стаса?

Решение. Да. Например, задач всего три, первую задачу решил сперва Стас, потом Ленья, потом Вася; вторую – Ленья, Вася, Стас; третью – Вася, Стас, Ленья.

Опережать нужно ненамного, а отставать – сильно.

7. Фирма проработала полгода, подсчитывая свою прибыль каждый месяц. Каждые два подряд идущих месяца суммарная прибыль была отрицательной.

а) Может ли суммарная прибыль за все полгода быть положительной?

б) А за первые 5 месяцев?

Ответ: а) Нет. Разбиваем 6 месяцев на пары, складываем и видим, что суммарная прибыль тоже должна быть отрицательной.

б) Да: +100, -101, +100, -101, +100.

Как найти пример? Если выкинуть нечетный месяц, то оставшая часть разбивается на двухмесячные отрезки, поэтому в сумме отрицательна. Значит, выкинутый месяц дал положительную прибыль. Каждый из оставшихся четных месяцев должен тогда давать отрицательную прибыль. Теперь естественно попробовать взять одинаковые прибыли у четных, и одинаковые – у нечетных. Если сделать отрицательную прибыль за два месяца маленькой, то три положительных перевесят два отрицательных месяца.

Задача (б) очень трудная, поэтому можно ее давать и разбирать для трех месяцев.

Для самостоятельного решения

8. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов

а) с суммой периметров 100

б) с суммой площадей 100?

Ответ: а) Да: разобьем квадрат 1×1 на 100×100 квадратов (сумма их периметров будет равна $100 \times 100 \times 4 \times \frac{1}{100} = 400 > 100$), а затем чуть уменьшим каждый квадрат).

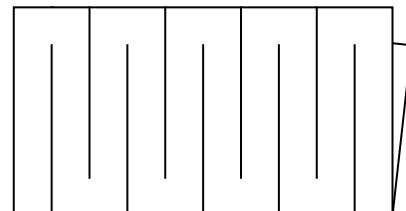
9. В однокруговом футбольном турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. «Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Сп | |
|----|---|---|---|---|---|---|----|---|
| 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 7 |
| 2 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 7 |
| 3 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 2 | 7 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 | 7 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 0 | 5 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 0 | 5 |
| Сп | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | | 4 |

10. Прорежьте в тетрадном листке дыру, в которую может пролезть преподаватель Вячеслав Александрович.

Ответ: Да, см. рис.

11. В припортовой таверне пираты Боб и Иван состязались в изготовлении и употреблении крепких напитков. Боб изготовил коктейль из рома и виски, а Иван смешал водку с портвейном. Известно, что ром крепче водки, а виски крепче портвейна. Может ли смесь Ивана оказаться крепче коктейля Боба? (Примечание для непьющих: крепость – это процент спирта в смеси.)



Указание. Водке не запрещено быть крепче виски. Тогда Иван может пить почти чистую водку, а Боб – почти чистый виски.

Ответ: Да, пусть крепость рома – 50%, водки – 40%, виски – 30%, портвейна – 20%. Боб смешает 1 часть рома и 9 частей виски, получит крепость 32%; Иван смешает 9 частей водки и 1 часть портвейна, получит 38%

www.ashap.info/Uroki/KirovLMSH/1999/index.html