

17. Дискретная непрерывность и разрывы

Если какая-то целочисленная величина в процессе меняется на каждом шаге не больше чем на 1 (в ту или другую сторону), то она обязательно проходит через все промежуточные значения между начальным и конечным. Такая величина называется *дискретной*, а прием – *дискретной непрерывностью*..

1. а) В баскетбольном матче первым забил «Спартак», а выиграло «Динамо». Верно ли, что в какой то момент счет был ничейный? (Попадание в корзину «с игры» приносит команде 2 или 3 очка)
а) В футбольном матче первым забил «Спартак», а выиграло «Динамо». Докажите, что в какой то момент счет был ничейный.

2. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары – черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

Полезно раскрасить объекты в два цвета так, чтобы граница или разрыв отделяли цвета.

3. В строке целых чисел каждое число, начиная со второго, на 1 больше предыдущего или в 3 раза меньше предыдущего. Первое число равно 1, последнее равно 100. Докажите, что среди чисел есть и 77.
4. В ряд лежат 100 яблок, соседние отличаются не более чем на 10 г. Докажите, что если выложить яблоки в ряд по возрастанию веса, то и тогда соседние будут отличаться не более чем на 10 г.

Если процесса нет, организуй сам. Подбери начало и конец процесса так, чтобы они были по разные стороны от нужного значения.

5. В ряд сидит 15 мальчиков и 15 девочек.
а) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
б) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
6. а) По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
б) По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 18 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну

Через промежуточное значение можно не только пройти, но и перепрыгнуть.

7. а) В строке четырехзначных чисел первое число 2013, последнее 2031. Соседние числа отличаются на 1 или на 100. Верно ли, что хотя бы одно число делится на 101?
б) Дополнительно известно, что ни одно число не делится на 100. Докажите, что хотя бы одно число делится на 101.

В некоторых процессах полезно начало и конец поменять местами. Тут помогает расположение на окружности.

8. На окружности отмечены 77 точек, среди них нет диаметрально противоположных.. Докажите, что можно провести диаметр через одну из точек так, что по обе стороны диаметра точек окажется поровну.

Дискретная непрерывность. Домашнее задание

ДН1. В ряд стоят несколько солдат. Рост соседей отличается не более чем на 2,4 см.

а) В строю есть солдат ростом 152 см, и солдат ростом 198 см. Докажите, что есть солдат, чей рост отличается от 170 см не более, чем на 1,2 см.

б) Докажите, что если солдаты встанут по росту, то по-прежнему рост соседей будет отличаться не более, чем на 2,4 см.

ДН2. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.

ДН3. За круглым столом равномерно посажены 100 дедов, причем у любых двух соседей количество волос в бородах отличается не больше, чем на 100. Докажите, что найдется пара дедов, сидящих напротив друг друга, у которых количество волос в бородах также отличается не больше, чем на 100.

ДН4. В одном из 100 окопов, расположенных в ряд, спрятался робот-пехотинец.

Автоматическая пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами робот (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный).

а) Известно, что вначале слева от робота – нечетное число пустых окопов. Сможет ли пушка наверняка накрыть робота?

б) Вначале робот может быть в любом из окопов. Сможет ли пушка наверняка накрыть робота?