

Полуинвариант-2

Догадавшись, что нужен полуинвариант, важно понять, что именно надо подсчитывать. Если чисел не хватает, добавьте их сами: пронумеруйте объекты или введите координаты.

1. а) В ряд слева направо стоят 10 коробок. В самой левой лежит 1 шарик, в следующей – 2, ..., в последней – 10. За один ход можно переложить любой шарик в любую коробку правее той, где он лежит. Докажите, что рано или поздно ходы закончатся.

б) Какое наибольшее число ходов могло быть сделано?

в) На доске записано 100 чисел. За один ход можно выбрать 2 разных числа и заменить меньшее на большее. Докажите, что рано или поздно ходы закончатся.

2. При игре в «Рассадку» сначала рисуют на плоскости несколько точек. За ход две точки соединяют кривой дугой, не пересекающей ранее проведённых линий, а на середину дуги ставят ещё одну точку. Нельзя проводить дугу из точки, откуда уже идут три линии. Докажите, что рано или поздно игра закончится.

Полуинвариантом может быть число комбинаций какого-то вида, чаще всего – число пар (рёбер графа).

3. По кругу стоит 1000 фишек трёх цветов. Если оба соседа фишки одного цвета, а сама фишка – другого, то за ход её можно перекрасить в цвет соседей. Докажите, что можно будет сделать лишь конечное число таких ходов.

4. У каждого депутата в парламенте не более трёх врагов. Парламент разбит на 2 палаты. Каждый день один из депутатов, обнаружив в своей палате не менее двух врагов, переходит в другую палату. Докажите, что рано или поздно переходы прекратятся. (Вражда обоюдная)

5. а) В ряд выписаны 20 различных чисел. Если находят два рядом стоящих числа таких, что левое больше правого, их меняют местами. Докажите, что рано или поздно замены прекратятся.

б) Какое наибольшее число операций может быть сделано?

Если полуинвариант может принимать лишь конечное число значений, или убывает, принимая лишь натуральные значения, то он достигнет «крайнего» значения. Это может обеспечить искомую позицию.

6. а) В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то прямоугольнике из не менее чем 100 клеток минусов больше чем плюсов, разрешается в этом прямоугольнике поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время в каждом таком прямоугольнике плюсов будет не меньше чем минусов.

б) В клетках таблицы 99×99 расставлены целые числа. Если в каком-то прямоугольнике из не менее чем 100 клеток сумма отрицательна, разрешается в этом прямоугольнике поменять знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом таком прямоугольнике будет неотрицательной.

в) Как (б), но числа – действительные.

Крайнее значение можно обеспечить, ограничив возрастающий полуинвариант.

7. Петя разрезал прямоугольный лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из получившихся кусков. Затем он проделал то же самое с одним из трёх получившихся кусков и т.д. Докажите, что после достаточного количества разрезов можно будет выбрать среди получившихся кусков 100 многоугольников с одинаковым числом вершин (например, 100 треугольников или 100 четырёхугольников и т.д.).

НА ДОМ

III1. Есть несколько коробок с шариками. За ход можно переложить шарик из коробки в другую, где шариков столько же или больше. Докажите, что все шарики соберутся в одну коробку.

III2. В Украине все города подняли над ратушами флаги – голубые либо оранжевые. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км. Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.

III3. Есть бесконечный в обе стороны ряд комнат. В некоторых комнатах живут пианисты, возможно, даже несколько в одной. Каждый день какие-то двое пианистов из одной или двух соседних комнат решают, что они мешают друг другу, и переселяются в соседние комнаты: правый – направо, левый – налево. Докажите, что рано или поздно такие переселения прекратятся.

Маткружок ashap.info/Uroki/Chelny2/ 20 января 2014 г . Ведет Александр Шаповалов