

## Полуинвариант-1

Пусть есть последовательность объектов, или процесс, в котором позиции последовательно сменяются. Полуинвариант – это связанное с позицией число, которое при разрешенных действиях все время растет или все время убывает (возможно, не строго). Выбор полуинварианта зависит от цели.

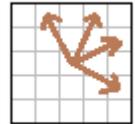
Если есть строгий полуинвариант, то позиция не может повториться (и, в частности, процесс не может зациклиться). В большинстве игр наличие полуинварианта гарантирует, что игра закончится.

**1а.** Сыщик гоняется за Шпионом по Ахипелагу Ста Островов. Оба используют только маршрутные корабли, которые курсируют ежедневно между некоторыми островами. Каждый корабль отплывает утром и приплывает на остров назначения к вечеру без захода на другие острова. С пересадками можно добраться с любого острова на любой. Сыщик всегда знает, где сейчас Шпион, и поймает его, если окажется с ним на одном острове. Сыщик может плыть в любой день, Шпион не плавает по пятницам. Как Сыщику поймать Шпиона?

Оценив изменение полуинварианта на одном шаге или на группе шагов, можно оценить, за сколько шагов процесс закончится.

**1б.** Докажите, что в задаче 1а Сыщик может поймать Шпиона не позднее, чем через два года.

**2. а)** На шахматной доске  $100 \times 100$  коню разрешено ходить только в четырех направлениях (см. рис). Докажите, что с какой бы клетки он ни начал, удастся сделать лишь конечное число ходов.



**б)** Какое наибольшее число ходов конь может сделать на этой доске?

**3.** В двух коробках лежат по 9 шариков. За один ход можно убрать из любой коробки 1 шарик или убрать 1 шарик из левой коробки и положить 9 шариков в правую.

**а)** Докажите, что ходы рано или поздно закончатся.

**б)** Какое наибольшее число ходов могло быть сделано?

Типичные полуинварианты: сумма, произведение, модуль разности, сумма модулей, сумма квадратов.

**4.** На доске написаны 100 натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух меньших различных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.

**5.** На доске написаны 3 различных натуральных числа. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое, геометрическое или гармоническое его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее – натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов.

**6.** Есть 10 различных чисел (возможно, не целых). За одну операцию можно два не равных числа заменить на два равных с той же суммой.

**а)** Может ли процесс продолжаться бесконечно?

**б)** Может ли один и тот же набор чисел возникнуть дважды?

## НА ДОМ

**ПИ1.** Есть 10 различных целых чисел (не обязательно положительных). За одну операцию можно два не равных числа одинаковой чётности заменить на два равных с той же суммой. Может ли процесс продолжаться бесконечно?

**ПИ2.** Вначале на доске было написано натуральное число, меньшее 1000. Каждым ходом число увеличивали в  $q$  раз.

**а)** После каждого из первых 9 ходов получалось целое число. Верно ли, что и дальше будут

получаться только целые числа?

**б)** То же, но целые числа получались после каждого из первых 10 ходов?

**ПИЗ.** Из всех замкнутых ломаных с вершинами в данных точках выбрали самую короткую. Докажите, что эта ломаная несамопересекающаяся.