Комбинаторная геометрия

Покрытия

1. Квадрат разрезан на треугольники. Докажите, что хотя бы один из них можно покрыть остальными вместе.

2. На сторонах остроугольного треугольника как на диагоналях построили три квадрата. Докажите, что квадраты полностью накрыли треугольник.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. Его покрывают тремя кругами, центры которых лежат в вершинах, а радиусы равны высотам, проведённым из этих вершин. Доказать, что каждая точка треугольника покрыта хотя бы одним из кругов.

4. а) На столе лежат пять одинаковых бумажных треугольников. Каждый из них разрешается сдвигать в любом направлении, *не поворачивая*. Верно ли, что всегда любой из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими?
б) На столе лежат пять одинаковых *равносторонних* бумажных треугольников. Каждый из них разрешается сдвигать в любом направлении, не поворачивая. Докажите, что любой из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими.

5. Дано бесконечное число углов. Углы можно сдвигать, но нельзя поворачивать. Докажите, что этими углами можно покрыть всю плоскость.

Вспомогательное разбиение на клетки

6. Из двух доминошек сложили Т-образный симметричный восьмиугольник. Можно ли вырезать из него пять равных фигуры, площадь каждой из которых больше шестой части площади восьмиугольника?

7. Можно ли какой-нибудь квадрат разрезать на равные треугольники и сложить из них два меньших неравных квадрата?

8. Верно ли, что из произвольного треугольника можно вырезать три равные фигуры, площадь каждой из которых больше четверти площади треугольника?

9. а) Многоугольник A разрезали на p многоугольников равных B. Многоугольник B разрезали на q равных многоугольников, подобных A. Докажите, что B можно разрезать на pq равных многоугольников, подобных B.
б) Прямоугольник A разрезали на p многоугольников равных B. Многоугольник B разрезали на q равных прямоугольников, подобных A. pq=20. Обязательно ли B – прямоугольник?
в) Многоугольник (не обязательно выпуклый) удалось разрезать на 20 меньших равных многоугольников, подобных исходному. Обязательно ли исходный многоугольник – параллелограмм?

Оценки: периметр, площадь

10. Из треугольника площади 1 вырезали круг радиуса 0,2. Докажите, что периметр треугольника ≤ 10.

11. Несколько черных квадратов со стороной 1 дм прибиты к белой плоскости одним гвоздем, не задевающим границ квадратов. Образовалась многоугольная черная фигура.
а) Оцените сверху площадь фигуры.
б) Толщина гвоздя 1 мм. Оцените сверху периметр фигуры.
в) Толщина гвоздя 0. Оцените сверху периметр фигуры.
г) Несколько черных квадратов со стороной 1 лежат на белой плоскости, образуя многоугольную черную фигуру (возможно, состоящую из нескольких кусков и имеющую дырки). Может ли отношение периметра этой фигуры к ее площади быть больше 10000 ?

Домашнее задание

КГ1. Докажите, что любой жесткий плоский треугольник T площади меньше четырёх можно просунуть сквозь треугольную дырку Q площади 3.

КГ2. Красный квадрат покрывают 100 белых квадратов. При этом все квадраты одинаковы и стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один из белых квадратов так, что оставшиеся белые квадраты все еще будут покрывать целиком красный квадрат?

КГ3. В четырёх заданных точках на плоскости расположены прожекторы, каждый из которых может освещать прямой угол. Стороны этих углов могут быть направлены на север, юг, запад или восток. Доказать, что эти прожекторы можно направить так, что они осветят всю плоскость.

КГ4. На плоскости нарисовано множество единичных отрезков, каждые два имеют общую точку. Докажите, что все отрезки можно накрыть
а) кругом радиуса 2
б) квадратом со стороной 2
в) кругом радиуса 1,5
г) кругом радиуса 1.

КГ5. На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму правильного шестиугольника, причём у всех салфеток одна сторона параллельна одной и той же прямой. Всегда ли можно вбить в стол несколько гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём каждая – только одним гвоздём?