

МОНОТОННОСТЬ

Преподаватель «При коммунизме Партии не будет, но сейчас роль Партии неуклонно возрастает!»

Студент-математик «Та-ак... функция монотонно возрастает... стремится к 0...

Значит, сейчас роль Партии отрицательна!»

Монотонная функция принимает каждое значение не более одного раза.

1. Сколько действительных решений у уравнения $x^3+x=2011$?
2. Подряд записали натуральное число и его куб. Могло ли быть записано ровно 3333 цифры?

Найди подходящий ответ и докажи (например, с помощью монотонности), что он – единственный.

3. Найдите все действительные решения уравнения **а)** $x^{11}-x^5-5=2011$; **б)** $3^x+4^x=5^x$.

Монотонность может быть инвариантом, или помогать организовать процесс...

4. Пусть целые ненулевые числа a_1, a_2, \dots, a_n таковы, что равенство

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}} = x$$

выполнено при всех целых значениях x , входящих в область определения дроби, стоящей в левой части. Докажите, что число n четно.

5. В магазин завезли 20 кг сыра, за ним выстроилась очередь. Отпустив сыр очередному покупателю, продавщица безошибочно подсчитывает средний вес покупки по всему проданному сыру и сообщает, на сколько человек хватит оставшегося сыра, если все будут покупать именно по этому среднему весу. Какое наибольшее число раз подряд продавщица могла сообщать, что сыра хватит еще ровно на 10 человек?

В геометрии бывает полезно рассмотреть семейство конструкций с непрерывно и монотонно меняющимся параметром. Часто можно выбрать несколько параметров, меняющихся «согласованно» (то есть монотонно по отношению друг к другу). Например, в семействе треугольников с двумя данными сторонами согласованы угол между ними и противоположная сторона.

6. Для сторон треугольника ABC выполнено $AB^2+BC^2<AC^2$. Не пользуясь теоремой косинусов докажите, что $\angle B$ – тупой.
7. Даны положительные a и b . Докажите, что из отрезков длин $a, b, \sqrt[2011]{a^{2011} + b^{2011}}$ можно сложить треугольник.
8. Вписанная окружность разбивает $\triangle ABC$ на круг и три криволинейные фигуры (назовем их A -, B - и C -кульками). Задана величина угла B . Докажите, что **а)** найдется такой треугольник ABC , что площадь B -кулька равна разности площадей A -кулька и C -кулька.
б) такой треугольник единственный с точностью до подобия.

Многие обратные теоремы (например, обратную теорему Пифагора) доказывают, показав с помощью монотонности единственность объекта (конструкции).

9. Точки A', B', C' лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC . Известно, что если отрезки AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке, то $BA'/A'C \cdot CB'/B'A \cdot AC'/C'B = 1$. Докажите обратное утверждение.
10. Пусть ABC – остроугольный треугольник, C' и A' – точки на сторонах AB и BC , B' – середина стороны AC . Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$
- не больше половины площади треугольника ABC .
 - равна четверти площади треугольника ABC тогда и только тогда, когда хотя бы одна из точек A', C' совпадает с серединой соответствующей стороны.

Домашнее задание

Мо1. Найдите все решения уравнения $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)=5040$.

Мо2. Несколько путников движутся с постоянными скоростями по прямолинейной дороге. Известно, что в течение некоторого периода времени сумма попарных расстояний между ними монотонно уменьшалась. Докажите, что в течение того же периода сумма расстояний от некоторого путника до всех остальных тоже монотонно уменьшалась.

Мо3. а) Прямоугольный треугольник $\triangle ABC$ разбили на две части высотой BH , опущенной на гипотенузу. Докажите, что сумма площадей вписанных кругов частей равна площади круга W , вписанного в исходный треугольник.

б) Рассмотрим треугольник MHA , где M лежит на луче NB и MA касается W . Докажите, что радиус вписанной окружности треугольника монотонно зависит от MH .

в) Высота MH разделила $\triangle AMC$ на два меньших треугольника. Оказалось, что сумма площадей вписанных кругов меньших треугольников равна площади круга, вписанного в $\triangle AMC$. Докажите, что $\angle M$ – прямой.