

## МОНОТОННОСТЬ

Преподаватель «При коммунизме Партии не будет, но сейчас роль Партии неуклонно возрастает!»

Студент-математик «Та-ак... функция монотонно возрастает... стремится к 0...

Значит, сейчас роль Партии отрицательна!»

Монотонная функция принимает каждое значение не более одного раза.

1. Сколько действительных решений у уравнения  $x^3+x=2011$  ?
2. Подряд записали натуральное число и его куб. Могло ли быть записано ровно 3333 цифры?

Найди подходящий ответ и докажи (например, с помощью монотонности), что он – единственный.

3. Найдите все действительные решения уравнения **а)**  $x^{11}-x^5-5=2011$ ; **б)**  $3^x+4^x=5^x$ .

Монотонность может быть инвариантом, или помогать организовать процесс...

4. Пусть целые ненулевые числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  таковы, что равенство

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}} = x$$

выполнено при всех целых значениях  $x$ , входящих в область определения дроби, стоящей в левой части. Докажите, что число  $n$  четно.

5. В магазин завезли 20 кг сыра, за ним выстроилась очередь. Отпустив сыр очередному покупателю, продавщица безошибочно подсчитывает средний вес покупки по всему проданному сыру и сообщает, на сколько человек хватит оставшегося сыра, если все будут покупать именно по этому среднему весу. Какое наибольшее число раз подряд продавщица могла сообщать, что сыра хватит еще ровно на 10 человек?

В геометрии бывает полезно рассмотреть семейство конструкций с непрерывно и монотонно меняющимся параметром. Часто можно выбрать несколько параметров, меняющихся «согласованно» (то есть монотонно по отношению друг к другу). Например, в семействе треугольников с двумя данными сторонами согласованы угол между ними и противоположная сторона.

6. Для сторон треугольника  $ABC$  выполнено  $AB^2+BC^2<AC^2$ . Не пользуясь теоремой косинусов докажите, что  $\angle B$  – тупой.
7. Даны положительные  $a$  и  $b$ . Докажите, что из отрезков длин  $a, b, \sqrt[2011]{a^{2011} + b^{2011}}$  можно сложить треугольник.
8. Вписанная окружность разбивает  $\triangle ABC$  на круг и три криволинейные фигуры (назовем их  $A$ -,  $B$ - и  $C$ -кульками). Задана величина угла  $B$ . Докажите, что **а)** найдется такой треугольник  $ABC$ , что площадь  $B$ -кулька равна разности площадей  $A$ -кулька и  $C$ -кулька.  
**б)** такой треугольник единственный с точностью до подобия.

Многие обратные теоремы (например, обратную теорему Пифагора) доказывают, показав с помощью монотонности единственность объекта (конструкции).

9. Точки  $A', B', C'$  лежат соответственно на сторонах  $BC, AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ . Известно, что если отрезки  $AA', BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке, то  $BA'/A'C \cdot CB'/B'A \cdot AC'/C'B = 1$ . Докажите обратное утверждение.
10. Пусть  $ABC$  – остроугольный треугольник,  $C'$  и  $A'$  – точки на сторонах  $AB$  и  $BC$ ,  $B'$  – середина стороны  $AC$ . Докажите, что площадь треугольника  $A'B'C'$
- не больше половины площади треугольника  $ABC$ .
  - равна четверти площади треугольника  $ABC$  тогда и только тогда, когда хотя бы одна из точек  $A', C'$  совпадает с серединой соответствующей стороны.

### Домашнее задание

**Мо1.** Найдите все решения уравнения  $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)=5040$ .

**Мо2.** Несколько путников движутся с постоянными скоростями по прямолинейной дороге. Известно, что в течение некоторого периода времени сумма попарных расстояний между ними монотонно уменьшалась. Докажите, что в течение того же периода сумма расстояний от некоторого путника до всех остальных тоже монотонно уменьшалась.

**Мо3. а)** Прямоугольный треугольник  $\triangle ABC$  разбили на две части высотой  $BH$ , опущенной на гипотенузу. Докажите, что сумма площадей вписанных кругов частей равна площади круга  $W$ , вписанного в исходный треугольник.

**б)** Рассмотрим треугольник  $MHA$ , где  $M$  лежит на луче  $NB$  и  $MA$  касается  $W$ . Докажите, что радиус вписанной окружности треугольника монотонно зависит от  $MN$ .

**в)** Высота  $MN$  разделила  $\triangle AMC$  на два меньших треугольника. Оказалось, что сумма площадей вписанных кругов меньших треугольников равна площади круга, вписанного в  $\triangle AMC$ . Докажите, что  $\angle M$  – прямой.