Теорема о пересечении ломаных

1. Бегун и велосипедист стартовали одновременно в противоположных точках круговой дорожки и двигались все время по часовой стрелке. Пока бегун сделал два круга, велосипедист сделал три. Докажите, что велосипедист хотя бы раз обогнал бегуна.

2. Король прошел из левого нижнего угла доски в правый верхний, делая ходы вправо, вверх и вправо-вверх. Ладья прошла из правого нижнего в левый верхний угол этой же доски, делаю ходы на одну клетку влево и вверх. Докажите, что есть клетка, на которой побывали обе фигуры.

3. На столе лежат в ряд несколько кусков швейцарского сыра разного веса и разной цены за кг, общим весом 3 кг. Продавец хочет разрезать один из кусков на две части, и заменить все куски справа от разреза кусками костромского сыра того же веса. Докажите, что он может добиться, чтобы стоимости костромского и оставшегося швейцарского сыра были одинаковы.

4. На какое наименьшее число многоугольников можно разрезать по границам клеток шахматную доску так, чтобы разрезы прошли по границе каждой клетки?

Теорема о пересечении ломаных (ТПЛ). Если внутри квадрата $ABCD$ проходят две ломаные: одна с концами A и C, другая с концами B и D, то эти ломаные пересекаются.

При решении задач 5,6 и 7 можно использовать ТПЛ.

5. Докажите, что если внутри квадрата $ABCD$ проходят две ломаные: одна с концами на сторонах AB и CD, другая с концами на сторонах BC и AD, то эти ломаные пересекаются.

6. Докажите, что если король прошел от верхнего до нижнего края клетчатой доски $N\times N$, а хромая ладья – от левого до правого, то на некоторой клетке побывали оба.

7. **а**) Электрическая схема имеет вид решетки 3×3: всего в схеме 16 узлов (вершины квадратиков решетки), которые соединены проводами (стороны квадратиков решетки). Возможно часть проводов перегорела. За одно измерение можно выбрать любую пару узлов схемы и проверить, проходит ли между ними ток (то есть проверить, существует ли цепочка неперегоревших проводов, соединяющих эти узлы). В действительности схема такова, что ток проходит от любого узла к любому. За какое наименьшее число измерений всегда можно в этом удостовериться?
б) Тот же вопрос для схемы, которая имеет вид решетки 5×5 (всего 36 узлов).

Как доказать лемму о пересечении ломаных?

8. Каждая клетка шахматной доски закрашена в один из двух цветов. Построим для каждого цвета граф, соединив ребрами клетки этого цвета, лежащие на одной вертикали, горизонтали или диагонали. Тогда хотя бы один из графов связен.
а) Докажите утверждение с использованием ТПЛ.
б) Докажите утверждение без использования ТПЛ.

9. На прямой отмечены две точки – слева синяя, справа красная. За один ход можно добавить или стереть две точки одного цвета, если между ними нет других точек. Можно ли в конце получить снова две точки: слева красная, справа – синяя?

10. Внутри квадрата проведены несколько непересекающихся ломаных, и отмечены их вершины и концы. Докажите, что можно провести несколько параллельных прямых так, чтобы между любыми двумя соседними была ровно одна отмеченная точка.

11. Докажите ТПЛ, покрасив ломаные в синий и красный цвета.

12. а) Докажите, что если две ломаные в квадрате не пересекаются, то можно так разбить квадрат на клетки, чтобы каждая клетка имела общих точки не более, чем с одной

ломаной.
б) Докажите, что из утверждения задачи 6 следует ТПЛ.

Домашнее задание

ПЛ1. То же, что 7, но для схемы **а)** 7×7 (64 узла) **б)** $N\times N$.

ПЛ2. На плоскости даны три красные точки, три синие точки и еще точка O. Известно, что точка O лежит и внутри треугольника с красными вершинами, и внутри треугольника с синими вершинами, причем расстояние от O до любой красной точки меньше расстояния от O до любой синей точки. Могут ли все красные и все синие точки лежать на одной и той же окружности?

ПЛ3. Попав в новую компанию, Чичиков узнавал, кто с кем знаком. А чтобы запомнить это, он рисовал окружность и изображал каждого члена компании хордой, причем хорды знакомых между собой пересекались, а незнакомых – нет. Чичиков уверен, что такой набор хорд есть для любой компании. Прав ли он? (Совпадение концов хорд считается пересечением).

ПЛ4. а) По круглому треку ездят три гонщика. Скорости постоянны, но все различны. У одного из гонщиков есть фляжка с питьем. При обгоне тот, у кого фляжка, всегда передает ее другому. Может ли фляжка никогда не попадать к одному из гонщиков?
б) По круглому треку ездят четыре гонщика. Скорости постоянны, но все различны. У одного из гонщиков есть фляжка с питьем. При обгоне тот, у кого фляжка, всегда передает ее другому. Может ли фляжка никогда не попадать к двум из гонщиков?
(Известно, что не бывает моментов, когда в одной точке оказываются 3 или 4 гонщика).

ПЛ5. Мозаика состоит из набора плоских прямоугольников. Все их можно уложить в один слой в одну прямоугольную коробку (так, что их стороны параллельны сторонам коробки). В бракованном наборе у каждого прямоугольника одна из сторон оказалось меньше стандартной. Можно ли утверждать, что у коробки, в которую складывается набор, тоже можно уменьшить одну из сторон?