Неоднозначные данные

«А это вам знать пока рано», – сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!». Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников всё-таки увидели то, что знать пока рано?

Неразличимые примеры

Чтобы доказать, что информации недостаточно для получения однозначного ответа, можно построить два примера, которые удовлетворяют всем условиям, но дают разные ответы.

1. В ряд выписаны 100 чисел, первое равно 3, а сумма любых трех подряд равна 100. Можно ли наверняка узнать, чему равно
а) 100-е число? **б)** 50-е число?

2. а) Незнайка утверждает, что он может узнать с помощью чашечных весов без гирь есть ли среди любых 3 камней такой, вес которого равен 1/3 общего веса. Не хвастает ли он?
б). А узнать, есть ли среди 10 камней камень веса 1/10 от общего веса?

3. Все виды растений одной страны были занумерованы подряд пятизначными числами от 2 до 20000 (числа идут без пропусков и повторений). Для каждой пары видов растений запомнили наибольший общий делитель их номеров, а сами номера были забыты (в результате сбоя компьютера). Можно ли для каждого вида растений восстановить его номер?

4. У Кащея есть куб, в каждой вершине которого вставлено по алмазу. Известны веса этих алмазов: 1 карат, 2 карата, ..., 8 карат. Кащей предлагает Ивану Царевичу такую игру: он сообщает Ивану сумму весов алмазов на каждом ребре. Если после этого Иван правильно назовет, куда какой по весу алмаз вставлен, то получит этот куб вместе с алмазами, а если хотя бы в одном месте ошибется, то распрощается с головой. Стоит ли Ивану соглашаться играть?

Примеры «задним числом»

Неразличимые примеры и контрпримеры могут строится после того, как испытания уже проведены и ответы даны, с использованием уже полученной информации. Этот метод часто применяется, чтобы опровергнуть предположение о наличие «гарантированного» алгоритма.

5. На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Нужно определить, лежит ли точка P внутри квадрата. Можно ли это наверняка узнать а) за два вопроса? б) за три вопроса?

6. Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Все жители деревни встали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли тот. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы. Определите и вы, чему она равна.

7. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуксу. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока он не скажет “стоп”. Может ли Фукс добиться, чтобы после «стопа» рядом со свободным местом наверняка не было туза пик?

Доказательство без разглашения

Школьники хорошо умеют отвечать на вопрос, не грузя родителей и учителей ненужными подробностями. Обмениваясь информацией по интернету, тоже важно сохранить коммерческие и иные секреты.

8. Суду предъявлен набор одинаковых с виду монет. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Задача адвоката: показать суду, сколько есть фальшивых монет, не разгласив ни про какую монету, фальшивая она или настоящая? (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)
а) Всего монет 100. Суд уже установил, что фальшивых 3 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?
б) Всего монет 100. Суд уже установил, что фальшивых 0 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?

9. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали Грише и Лёше по 3 карты, а оставшуюся карту
а) спрятали;
б) отдали Коле.
Гриша и Лёша могут по очереди сообщать вслух любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом Коля не смог вычислить местонахождение ни одной из тех карт, которых он не видит? (Гриша и Лёша не договаривались о каком-либо особом способе общения; все переговоры происходят открытым текстом.)

10. В условиях задачи 8:
в) Всего монет 99. Суд уже установил, что фальшивых не более 2. Может ли адвокат показать, что их ровно 1?
г) Всего монет 99. Суд уже установил, что фальшивых 1 или 2. Как адвокату показать, что их ровно 2?

Домашнее задание

НД1. а) В клетки доски 8×8 записали числа 1,2,...,64 в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в любой паре клеток с общей стороной. Всегда ли можно узнать расположение всех чисел?
б) То же для доски 9×9.

НД2. У N ключей от N гостиничных номеров потерялись бирки. Известно, что каждый ключ открывает ровно один из номеров. Какое наименьшее число пробных открываний дверей надо сделать, чтобы наверняка определить, от какого номера каждый ключ?
a) N=4 ;
b) N=5 ;
c) N – произвольно.

НД3. В условиях задачи 8:
д) Всего 100 монет. Суд уже установил, что фальшивых 2 или 3. Как адвокату показать, что их ровно 3?
е) Всего 100 монет. Суд уже установил, что фальшивых 2, 3 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 3?
ж) Всего 100 монет. Суд о числе фальшивых ничего не известно. Как адвокату показать, что их ровно 10?

НД4. Каждому из трех математиков написали на лбу натуральное число, причем одно из этих чисел являлось суммой двух других, и сообщили им об этом. Математик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй математики, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных?

НД5. Попав в новую компанию, Чичиков узнавал, кто с кем знаком. А чтобы запомнить это, он рисовал окружность и изображал каждого члена компании хордой, причем хорды знакомых между собой пересекались, а незнакомых – нет. Чичиков уверен, что такой набор хорд есть для любой компании. Прав ли он? (Совпадение концов хорд считается пересечением).

НД6. а) Дима придумал секретный шифр: каждая буква заменяется на слово* длиной не больше 10 букв. Шифр называется хорошим, если всякое зашифрованное слово расшифровывается однозначно. Серёжа убедился (с помощью компьютера), что если зашифровать слово длиной не больше 330 букв, то результат расшифровывается однозначно. Следует ли из этого, что шифр хороший? (В алфавите 33 буквы, под "словом" мы понимаем любую последовательность букв, независимо от того, имеет ли она смысл.)
б) То же, но проверены слова длиной не более 3300 букв.

НД7. Трое игроков могут общаться друг с другом по телефону. Они хотят раздать три карты так, чтобы каждый знал только свою. (Других людей привлекать нельзя).
Указание. Вот как можно раздать одну карту игроку А. Занумеруем карты 0,1,2. Игроки В и С независимо и в тайне друг от друга сообщают А по случайно выбранному остатку. Сумма остатков по модулю 3 и будет картой А.