

Бесконечные конструкции

Определение. Последовательность объектов – это бесконечный набор, по порядку занумерованный натуральными числами.

Простое индуктивное построение.

Наращиваем башню, каждым шагом надстраивая один этаж.

Зад.1. а) Существует ли последовательность натуральных чисел, где каждый член делится на сумму любого подмножества чисел с меньшими номерами?

б) Существует ли строго возрастающая последовательность натуральных чисел, где каждый член не делится на сумму любого подмножества чисел с меньшими номерами?

Зад.2. (Диагональный метод Кантора) Дана последовательность бесконечных двоичных дробей. Постройте еще одну такую дробь, отличную от всех дробей последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ обгоняет последовательность $\{y_n\}$, если, начиная с некоторого номера, все $x_n > y_n$.

Зад.3. Дана последовательность последовательностей действительных чисел. Докажите, что есть последовательность, которая обгоняет каждую из данных.

Счетные множества

Опр. Бесконечное множество *сечно*, если его элементы можно занумеровать натуральными числами.

Такая нумерация может быть очень полезна для индуктивных построений.

Зад.4. Докажите сечность следующих множеств:

- а)** Все целые числа;
- б)** Бесконечное подмножество сечного множества;
- в)** Клетки бесконечной шахматной доски;
- г)** Множество рациональных чисел;
- д)** Множество конечных подмножеств сечного множества.

Пункт (б) показывает, что не обязательно нумеровать всеми натуральными числами, можно лишь некоторыми, но без повторений.

Зад.5. а) Дана последовательность бесконечных в обе стороны двоичных дробей с десятичной запятой. Докажите, что есть еще одна такая дробь, отличная от всех данных.

б) Дана последовательность бесконечных в обе стороны двоичных цепочек (без запятой). Цепочки, отличающиеся друг из друга сдвигом, считаются равными. Докажите, что есть еще одна цепочка, не равная ни одной данной.

Зад.6. Два бога по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Первый своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, второй – одну. Если в итоге получится периодическая дробь, выигрывает первый, иначе – второй. Кто выиграет при наилучшей игре сторон?

Отдай нас

Гол может быть результатом комбинации из нескольких пасов. При индуктивном построении следующий этаж можно строить не за один, а за любое конечное число шагов – ведь всегда впереди еще бесконечно много шагов!

Зад.7. Дана последовательность бесконечных двоичных дробей. Постройте еще одну такую дробь, отличную от всех дробей последовательности, при этом для каждого номера n она должна отличаться от n -й дроби как минимум в n знаках.

Если надо использовать все элементы сечного множества, то позаботьтесь, чтобы минимальный до сих пор не использованный номер был рано или поздно использован.

Зад.8. Замостите плоскость горизонтальными прямоугольниками $1 \times n$, используя прямоугольник каждого размера ровно один раз.

Зад.9. Можно ли переставить числа натурального ряда в другом порядке так, чтобы сумма любых первых k чисел делилась на k ?

Теорема о проективном пределе

Зад.10. На столе лежит бесконечная куча спичек. Первым ходом она делится на две кучки. Каждым следующим ходом все кучки, где более одной спички, делятся на две меньшие.

а) Докажите, что будет сделано бесконечно много ходов.

б) Докажите, что из некоторых кучек, возникавших на разных ходах, можно составить бесконечную цепочку кучек, строго вложенных друг в друга: $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$

Зад.11. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен и имеет конечное число детей. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

Зад.12. Дан бесконечный граф G со счетным множеством вершин. Известно, что любой его конечный подграф можно правильно раскрасить в 4 цвета. Докажите, что и G можно правильно раскрасить в 4 цвета.

Домашнее задание

БК1. Дано 2011 квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами. Докажите, что найдётся целое число, не равное значению никакого из данных трёхчленов ни в какой целой точке.

БК2. Дана последовательность бесконечных двоичных дробей. Постройте еще одну такую дробь, отличную от каждой из дробей последовательности в бесконечном числе знаков.

БК3. Рассмотрим последовательность, первые два члена которой равны 1 и 2 соответственно, а каждый следующий член – это наименьшее натуральное число, которое еще не встретилось в последовательности и которое не взаимно просто с предыдущим членом последовательности. Докажите, что каждое натуральное число входит в эту последовательность.

БК4. Докажите, что для любой биекции (т.е. взаимно-однозначного соответствия) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ множества целых чисел в себя найдутся еще две биекции g и h из \mathbf{Z} в себя, что $f(x) = g(x) + h(x)$ для всех $x \in \mathbf{Z}$.

БК5. Внутри квадрата со стороной 10 сидит невидимая блоха. Левша и блоха играют, ходя по очереди. Очередным n -м ходом Левша проводит прямую, после чего блоха совершает прыжок длины $1/n$, не пересекающий ни одной проведенной Левшой прямой и не выходящий за пределы квадрата. Если такой прыжок невозможен, блоха проигрывает. Может ли Левша выиграть, как бы ни играла блоха?

БК6. Можно ли разбить натуральные числа

а) на конечное число

б) на бесконечное число

бесконечно возрастающих геометрических прогрессий?

БК7. Пусть дана бесконечная во все стороны шахматная доска, в клетки которой вписаны целые числа (возможно, с повторами). Рассмотрим всевозможные бесконечные маршруты короля по этой доске, и для каждого маршрута выпишем соответствующую последовательность чисел. Могут ли в результате получиться все возможные последовательности целых чисел?