Непрерывная комбинаторика: комбинации и оценки

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов нецелого веса. Важным приемом является упорядочение объектов.

Зад1. Есть несколько камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение: Любые два камня вместе тяжелее одного?

Зад2. Сборные Угунди и Буранды (по 12 игроков в каждой) намерены сыграть серию матчей по борьбе, где более сильный игрок всегда побеждает более слабого. Для каждого матча организуется 12 пар: угундиец против бурандийца, в каждой паре побеждает один из соперников, счет в матче – по числу побед. Организаторам известны сравнительные силы игроков внутри каждой из команд, но не между игроками из разных стран. Они собирается устраивать матчи до тех пор, пока какой-нибудь матч не закончится вничью (или пока не выяснится, что ничейный матч невозможен). Каким наименьшим числом матчей они всегда могут обойтись?

Зад3. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

Предположив противное, мы получим некоторое утверждение, верное для всех наборов. Умело выбирая нужные наборы, придем к противоречию.

Зад4. В 100 ящиках лежат апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать

а) 51 ящик, что в них окажется по весу не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

б) 34 ящика, что в них окажется по весу не менее трети всех апельсинов и не менее трети всех бананов.

Зад5. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса.

Докажите, что

а) есть по крайней мере 200 яблок одинакового веса;

б) есть раскладка, когда по крайней мере 5 пакетов весят одинаково.

в) При каком наибольшем k можно заведомо утверждать, что найдутся k яблок одинакового веса?

Разбиения с небольшой разницей

Зад6. а) На столе лежат несколько кусков шоколада, самый большой весит b. Петя начинает, и они с Васей по очереди съедают по куску, пока не съедят всё. Докажите, что при наилучших действиях Васи Петя сможет съесть больше Васи не более, чем на b.

б) Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две кучки. Затем Ерема выбирает кучку для дележки, и они ее делят, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и вторую кучку, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

Зад7. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

Лемма.8. В $2n$ ящиках лежат сливы и вишни. В каждом ящике слив не более c кг, а вишен не более v кг. Докажите, что ящики можно разделить на две группы по n штук, так чтобы общий вес слив в группах отличался не больше чем на c, а вишен – не больше чем на v.

Зад9. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

Зад10. У Карлсона есть 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем сотая часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съесть поровну варенья из любых 100 банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье.

Зад11. На столе лежат 10 кусков сыра. Петя берет себе самый маленький (по весу) кусок. Затем он режет один из кусков на столе на две части, и снова берет себе самый маленький из получившихся 10 кусков. Эти действия: разрезание и взятие куска – Петя повторяет, пока у него не наберется 9 кусков. Докажите, что Петя возьмет себе не более половины сыра (по весу).

Домашнее задание

КО1. Есть пять кусков сыра разного веса. Про любые два известно, который тяжелее. Известно также, что можно разложить весь сыр на две кучки равного веса. Как можно сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

КО2. Дано 2011 положительных чисел. Известно, что для любой пары чисел a и b их сумма или одна из разностей есть среди данных. Докажите, что среди этих чисел есть и их среднее арифметическое..

КО3. Есть 100 яблок. Назовем натуральное число $k<100$ хорошим, если найдется k яблок, чей вес равен ровно половине общего веса. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел?

КО4. Есть n пакетов, в каждом – яблоко и груша общим весом 1 фунт. Докажите, что можно съесть по одному фрукту из каждого пакета так, чтобы как общий вес оставшихся каждого наименования был не более $(n+1)/4$ фунтов.

КО5. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на любое заданное наперед число дуг так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)