Принцип Дирихле в геометрии. Всюду плотные множества.

Принцип Дирихле одинаково хорошо работает как с дискретными, так и с непрерывными величинами: длинами, площадями, объемами. Обычно для ее применения длины и площади надо «размножать» переносами.

1. Как известно, на Земле площадь суши меньше площади океанов. Докажите, что в океане можно разместить два корабля в диаметрально противоположных точках Земли.

2. На окружности радиуса 1 отмечены несколько дуг общей длины 2. Докажите, что в окружность можно вписать правильный треугольник так, чтобы никакая вершина не попала на эти дуги.

3. В единичном квадрате закрашено несколько кругов, диаметр каждого – меньше 0,001. Расстояние между любыми окрашенными точками не равно 0,001. Докажите, что закрашенная площадь $\leq 0{,}34$.

4. Дан многоугольник площади >1 на координатной плоскости. Докажите, что в нем найдутся такие точки A и B, что у вектора $\boldsymbol{AB}$ обе координаты целочисленны.

5. (*Теорема Минковского*). Дан выпуклый многоугольник площади >4, центрально симметричный относительно начала координат. Докажите, что в нем найдется целочисленная точка, отличная от начала координат

.

Определение. Множество M называется *всюду плотным* на фигуре F, если в любой окрестности любой точки фигуры F есть точки множества M.

6. Докажите, что на числовой прямой всюду плотно **а)** множество рациональных чисел **б)** множество иррациональных чисел **в)*** множество чисел вида $m+n\sqrt{2}$, где m и n – целые.

7. Блоха скачет по окружности длины 1 прыжками постоянной иррациональной длины. На окружности есть ямка некоторой ширины. Докажите, что рано или поздно блоха попадет в ямку.

Определение. Пусть $y>0$. Обозначим $\lg(y)$ единственное решение уравнения $10^x=y$. Иначе говоря, $10^x=y \Leftrightarrow x=\lg(y)$.

8. Докажите, что

а) lg 2 – иррациональное число.

б) десятичные записи положительных чисел x и y состоят из одних и тех же цифр в одном и том же порядке $\Leftrightarrow$ $\{\lg(x)\}=\{\lg(y)\}$.

в) если n – натурально и $\{\lg(n)\}\leq\{\lg(x)\}<\{\lg(n+1)\}$, то десятичная запись числа x начинается в точности цифрами числа n.

9. Для любой комбинации цифр найдется такое натуральное m, что 2^m начинается на эту комбинацию. (Например, есть степень 2, которая начинается на 2011.)

10. а) Вначале на отрезке длины 1000 отмечены только его концы. За одну операцию можно выбрать один из концов и дополнительно отметить все точки, которые в полтора раза ближе к выбранному концу, чем отмеченные ранее. Докажите, что за несколько таких операций можно добиться, чтобы отмеченные точки разбили отрезок на части длины меньше 1.

б) Есть два сосуда 3 и 5 литров без делений, два крана – с горячей и холодной водой и раковина для слива воды. Задана промежуточная температура (меньше температуры горячей, но больше температуры холодной воды). Докажите, что можно отмерить 3 литра воды с температурой, которая отличается от заданной не более, чем на 0,1 градуса

в) То же, но отмерить 2 литра воды.

Домашнее задание

ДГ1. Докажите, что $\lg2+\lg3+\ldots+\lg N$ – иррациональное число.

ДГ2. Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что a^b – рационально?

ДГ3.(*теорема Блихфельдта*) Пусть F – фигура площади > n на координатной плоскости (n – натурально). Докажите, что F можно параллельно перенести так, чтобы она покроет не менее чем n+1 целочисленную точку.

ДГ4. Попарные расстояния между точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$ больше 2, а площадь фигуры F меньше π. Докажите, что F можно сдвинуть на вектор длины ≤ 1 так, что все n точек останутся снаружи.

ДГ5. Докажите, что если между параллельными прямым на плоскости есть хотя бы одна целочисленная точка, то таких точек бесконечно много.