

Средние в геометрии: поиск формул.

Упр 1. Докажите неравенства для средних двух неотрицательных чисел:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq ab \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

ср. гармоническое \leq ср.геометрическое \leq ср. арифметическое \leq ср. квадратичное.

Каждое из средних двух чисел x и y является функцией от них $C=C(x,y)$.

Упр 2. Докажите следующие свойства этих средних:

- а) $C=x \Leftrightarrow x=y \Leftrightarrow C=y$ (совпадение только при равенстве)
- б) Если $x < y$, то $x < C < y$ (среднее лежит между)
- в) $C(kx, ky) = k C(x, y)$ при $k > 0$ (однородность)

Замечание. Благодаря однородности среднее не зависит от выбора единиц измерения.

Наблюдение. Если $C(x,y)$ удовлетворяет всем свойствам средних, то чаще всего C – одно из вышеперечисленных средних (особенно в геометрии).

Задание 3. Определите, какие из величин C в ситуациях 4-7 удовлетворяют всем трем свойствам средних.

Сит 4. а) Первую половину пути путник шел со скоростью x , а вторую – со скоростью y . C – средняя скорость на всем пути.

б) Половину времени путник шел со скоростью x , а вторую – со скоростью y . C – средняя скорость на всем пути.

в) Половину времени путник шел со скоростью x , а вторую – со скоростью y . C – средняя скорость на первой половине пути.

Сит 5. Дана описанная равнобокая трапеция с основаниями x и y .

а) C – боковая сторона трапеции;

б) C – диагональ трапеции;

в) C – высота трапеции.

Сит 6. Окружности с диаметрами x и y касаются внешним образом.

а) C – отрезок их общей касательной, концами которого являются точки касания.

б) C – полусумма площадей.

Сит 7. x и y – длины оснований трапеции. C – длина отрезка с концами на боковых сторонах и параллельного основаниям, который

а) соединяет середины боковых сторон;

б) делит площадь трапеции пополам;

в) делит периметр трапеции пополам;

г) делит трапецию на две подобные;

д) проходит через точку пересечения диагоналей.

Когда есть подозрение, что $C(x, y)$ – какое-то из средних, его формулу можно угадать еще до явного вычисления. Для этого полезно вычислить $C(x, y)$ в задаче для конкретных значений x и y и сравнить со значениями соответствующих формул. Полезно помнить, что $C(0, y) = y/2$ для ср.арифметического, 0 – для ср. геометрического и ср. гармонического, $y\sqrt{2}$ для ср.квadraticного. Если 0 подставить нельзя, можно устремить x к 0 . Кроме того, ср. гармоническое $\rightarrow 2y$ при $x \rightarrow \infty$.

Задание 8. Для тех C из ситуаций 4-7, которые удовлетворяют всем условиям средних, подберите подходящую формулу среднего.

Зная формулу, легче подобрать подходящую для ее доказательства геометрическую конструкцию.

Среднее арифметическое возникают при суммировании длин отрезков и площадей.
Среднее геометрическое чаще всего возникает из пропорции вида $a/b=b/c$ (подобие с общим отрезком) или из формулы $b^2=ac$ (отрезки секущей и касательной, отрезки хорд).
Среднее квадратичное – из теоремы Пифагора.
Среднее гармоническое \Leftrightarrow среднему арифметическому для обратных величин. Например, если $ax=by=cz=S$, то a, b, c ведут себя как обратные к x, y, z .

Задание 9. Докажите подобранные формулы для средних в ситуациях 4-7.

Зад 10. На одной прямой последовательно отложены отрезки AD и DB с длинами x и y соответственно и построена полуокружность с диаметром $AB = x + y$, O – ее центр. Из точки D восстановлен перпендикуляр к AB до пересечения с полуокружностью в точке E , а перпендикуляр к AB в точке O пересекает полуокружность в точке N . Затем проведен радиус OE полуокружности и перпендикуляр DM к этому радиусу. Величина C – это длина отрезка а) OE б) DE в) MD г) MA д) ME е) DN .

Найдите явную формулу для C в тех случаях, когда это формула одного из средних.

Иногда неравенство отрезков можно свести к неравенству между средними.

Зад11. Дан четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что окружность, описанная около треугольника ABC , касается стороны CD , а окружность, описанная около треугольника ACD , касается стороны AB . Докажите, что диагональ AC не больше, чем расстояние между серединами сторон AB и CD .

Домашнее задание

Определите, какие из величин C в задачах 1-5 удовлетворяют всем трем свойствам средних, и для таких C найдите явную формулу.

Ср1. В треугольнике со сторонам x и y и углом 60° между ними C – третья сторона.

Ср2. Трапеция разбита диагоналями на 4 треугольника, x и y – площади треугольников, примыкающих к основаниям. C – площадь одного из остальных треугольников.

Ср3. В треугольнике одна из сторон равна трети периметра. x и y – наибольшая и наименьшая высоты, C – оставшаяся высота.

Ср4. В треугольнике ABD $AD=x$, $BD=y$, $y < x$, O – центр вписанной окружности.

Через точки A, B, O провели окружность. C – длина отрезка касательной из точки D этой окружности.

Ср5. Треугольник подобен треугольнику, составленному из его медиан, x и y – наибольшая и наименьшая стороны, C – оставшаяся сторона.

Интернет-кружок 9 класса, Набережные Челны. Рук. А.Шаповалов, март 2011 г. <http://www.ashap.info/Uroki/CheLny1/index.html>