

Комбинаторный метод в теории чисел

Сущность комбинаторного метода в теории чисел состоит в следующем. Пусть требуется доказать, что некоторое целое число a делится на некоторое целое число b . Тогда нужно придумать некие объекты и показать, что всего их $a/b + c$, где c – также некоторое целое число. Отсюда будет автоматически следовать, что a кратно b , так как количество этих объектов также является числом целым. Попробуем?

0. а) Докажите, что число способов разрезать шахматную доску на доминошки — чётно.

б) Докажите, что число способов разрезать клетчатый куб на параллелепипеды $2 \times 2 \times 1$ кратно 3.

1. (Делимость на факториал) Докажите, что произведение n последовательных натуральных чисел всегда делится на $n!$

б) Обобщите этот результат на целые числа.

2. (Задача о блохе) Пусть p – простое число. По окружности расставлено p точек, по которым прыгает блоха. Это вредное насекомое движется по часовой стрелке, каждый раз перепрыгивая через одинаковое число точек.

а) Докажите, что она побывает на всех точках.

б) Верно ли это утверждение для составного p ?

в) А при каком ограничении на шаг блохи становится верным?

3. (Малая теорема Ферма) Пусть p – простое число. Рассмотрим нитки из p бусинок, каждая из которых покрашена в один из a цветов.

а) Сколько всего существует таких ниток (мы различаем начало и конец нитки)?

б) Ожерелье состоит из p бусинок, надетых на кольцевую нитку. Сколько существует ожерелий, которые переходят в себя при некотором повороте?

в) Теперь будем считать одинаковыми ожерелья, переходящие друг в друга при некотором повороте. Сколько всего существует различных ожерелий при новом определении?

г) Докажите малую теорему Ферма: $a^p - a$ делится на p .

4. (Теорема Вильсона) Пусть p – простое число. На плоскости отмечены вершины правильного p -угольника.

а) Посчитайте число замкнутых ориентированных ломанных, проходящих по всем вершинам этого p -угольника.

б) Теперь будем считать одинаковыми ломанные, переходящие друг в друга при повороте. Сколько теперь есть различных ломанных?

в) Докажите теорему Вильсона: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

5. (Интересная рекуррента)

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность, заданная соотношениями $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 3,$

$a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ для $n > 3$. Докажите, что a_p делится на p для любого простого p .

Подсказка: Покажите, что a_n – количество способов разрезать клетчатое кольцо из n клеток на доминошки и триминошки.

6. Сложим все не более чем стозначных чисел, у которых сумма цифр делится на 17. Докажите, что результат тоже делится на 17.

Для самостоятельного решения

КТЧ1. а) Докажите, что сумма семизначных палиндромов делится на 9.

б) Докажите, что сумма восьмизначных палиндромов делится на 9.

КТЧ2. Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если любая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно

а) делится на $12!$;

б) делится на $13!$

КТЧ3. Докажите, что C_{2n}^n делится на $n+1$.

КТЧ4. Докажите, что для любых неотрицательных целых m и n число $(2m)!(2n)!$ кратно $m!n!$ $(m+n)!$