Перевод на другой язык (изоморфизм)

1. **а)** Сколько девятизначных чисел состоят из семи семерок и двух единиц? **б)** Сколько решений в неотрицательных целых числах у уравнения $x+y+z=7$? **в)** Сколько решений в натуральных числах у уравнения $x+y+z=10$?
2. **а)** На пустой шахматной доске двое играющих по очереди двигают коня. Двигать можно только влево-вниз. Кто не сможет сделать ход – проиграл. Найдите все клетки, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо не играл противник. **б)** В двух коробочках лежат орехи, в каждой не более семи. Играют двое. За один ход нужно взять три ореха – два из одной коробочки, третий – из другой. Найдите все позиции, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо не играл противник.
3. Сколько решений может быть у системы уравнений $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\\(x-c)^2+(y-d)^2=R^2\end{cases}$ при различных значениях параметров *a, b, c, d, r, R?*
4. По прямой в одном направлении на некотором расстоянии друг от друга движутся 5 одинаковых шариков, а навстречу им движутся 5 других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдет между шариками?
5. Летучая ладья ходит как обычная, только не может пойти на соседнее поле. Сколько есть замкнутых маршрутов летучей ладьи по всем полям доски 4×4?

Байка о туристах, идущих вдоль реки.

6. Существует ли число, которое при умножении на 2 становится точным квадратом, а при умножении на 3 – точным кубом?
7. Даны несколько графиков квадратных трехчленов вида $y=x^2+ax+b$. *Каждые два пересекаются* в точке или точках с целыми координатами, при этом никакие три не проходят через одну точку, и все абсциссы точек пересечения различны. Может ли число графиков равняться **а)** четырем **б)** десяти?
8. Следующая игра является переводом на другой язык одной очень популярной игры. Какой? «На столе лежат 9 карточек с числами от 1 до 9. Двое играющих по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто первым после своего хода сможет выложить три карточки с суммой 15.»
9. На доске выписаны числа 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, …., $\frac{1}{99}$. За одну операцию пара выбранных чисел a и b заменяется на $ab+a+b$. После 99 операций осталось одно число. Какое?

Для самостоятельного решения

Я1. Существует ли натуральное число, которое при умножении на 3 становится точным кубом, на 4 – точной 4-й степенью, а на 5 – точной 5 степенью?

Я2. Сколько решений в нечетных натуральных числах у уравнения $x+y+z=17$?

Я3. На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа x и y ($x \le y$). Петя записывает на бумажке x^2 (квадрат первого числа), а затем заменяет числа на доске числами x и $y-x$, записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

Я4. Докажите неравенство

$$\sqrt{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2+(y_1+y_2+\ldots+y_n)^2} \le \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\ldots+\sqrt{x_n^2+y_n^2}$$

Я5. За круглым столом были приготовлены 12 мест для жюри с указанием имени на каждом месте. Николай Николаевич, пришедший первым, по рассеянности сел не на свое, а на следующее по часовой стрелке место. Каждый член жюри, подходивший к столу после этого, занимал свое место или, если оно уже было занято, шел вокруг стола по часовой стрелке и садился на первое свободное место. Возникшее расположение членов жюри зависит от того, в каком порядке они подходили к столу. Сколько может возникнуть различных способов рассадки жюри?