Бесконечное и минимальный контрпример

Лестница надежна, если надежны все ее ступеньки. Но это надо проверять. Узким местом часто оказывается самая низкая из ненадежных ступенек. Дополнительное свойство «самая низкая» создает то ограничение свободы, которое облегчает поиск (если есть) или проверку отсутствия (если нет) такой ступеньки. В самом деле, если нет самой низкой ненадежной ступеньки, то ненадежных ступенек нет вообще (мы считаем, что лестница не уходит бесконечно вниз, то есть *бесконечный спуск* невозможен). То же самое на математическом языке можно сказать и по-другому: либо есть *минимальный контрпример*, либо контрпримера нет вообще.

Упр 1. а) Докажите, что во всяком множестве натуральных чисел есть минимальное число.
б) Верно ли это для множеств целых чисел? Положительных рациональных чисел?

Упр 2. (Принцип индукции) Некоторое утверждение $P(n)$ зависит от натурального параметра n. Доказано, что $P(1)$ верно, и для любого k из верности $P(n)$ для всех $n<k$ следует, что $P(k)$ верно. Докажите, что $P(n)$ верно для всех n.

Упр 3 (Метод бесконечного спуска=принцип минимального контрпримера) Есть некоторый набор конструкций, с каждой можно связать натурального параметра n (но конструкций с одним и тем же n может быть много).
а) Есть конструкции, не обладающие некоторым Свойством. Докажите, что есть минимальное n, для которого есть конструкция без Свойства, а при меньших n все конструкции обладают Свойством.
б) Доказано, что если есть конструкция без Свойства со значением m, то найдется конструкция без Свойства со значением $k<m$. Докажите, что все конструкции обладают Свойством.

Задача 4. Числа Фибоначчи: $f_0=f_1=1$, $f_k=f_{k-1}+f_{k-2}$ при $k>1$. Докажите, что соседние числа Фибоначчи взаимно просты.

Задача 5. Стороны многоугольника идут по границам клеток, его площадь – n клеток. Докажите, что его периметр не более $3n+1$.

Задача 6. а) У уравнения с целыми коэффициентами $x^2+ax+b=0$ нет целых корней. Докажите, что у него нет и рациональных корней.
б) То же для уравнения $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=0$

Задача 7. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды одну карту рубашкой вниз или пачку из нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает эту карту или всю вынутую пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что независимо от того, как Петя выбирает пачки, в конце концов все карты лягут рубашкой вверх.

Задача 8. На доске написано натуральное число $n>1$. Разрешается выбрать любой простой делитель p числа n, и заменить n на число $\frac{n}{p}\cdot(p-1)^p$. Докажите, что в результате таких замен на доске рано или поздно появится число 1.

Задача 9. Можно ли переставить все числа натурального ряда в другом порядке так, чтобы для любого n сумма первых n чисел делилась на n?

Домашнее задание

МК1. В строке записано несколько чисел. Каждую секунду робот выбирает какую-либо пару рядом стоящих чисел, в которой левое число больше правого, меняет их местами и при этом умножает оба числа на 2. Докажите, что через некоторое время сделать очередную такую операцию будет невозможно.

МК2. В бесконечной последовательности есть конечное число единиц, остальные члены равны 0. Если найдется группа 01, ее можно заменить на любую группу вида 10...0. Докажите, что удастся сделать лишь конечное число замен.

МК3. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, каждый не на своем месте. Билетер может попросить поменяться местами любых двух соседей, и так много раз, однако зритель, попав на свое место, затем пересаживаться отказывается. Докажите, что билетер может рассадить всех по своим местам.

МК4. а) Шайка разбойников отобрала у купца мешок монет. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, оставшуюся сумму можно разделить между разбойниками поровну. Докажите, что если отложить одну монету, то число монет разделится на число разбойников.

б*) Шайка разбойников отобрала у купца мешок золотых слитков. Оказалось, что какой бы слиток ни отложить, оставшиеся можно разделить между разбойниками поровну (по весу). Докажите, что если отложить один слиток, то число слитков разделится на число разбойников.