Последовательности и рекурренты

Говорят, что задана последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, если по каждому номеру n можно определить число a_n.

Способы задания последовательности:

I. *Аналитический: формула общего члена*

II. *Рекуррентный: следующий член выражается через один или несколько предыдущих.*

III. *Конструктивно-алгоритмический: указан способ, как за конечное число действий найти любой член последовательности.*

IV. *Неконструктивно-описательный.*

Примеры:

$a_{n+1}=a_n+d$ – арифметическая прогрессия (d – ее разность)

$b_{n+1}=qb_n$ – геометрическая прогрессия (q – знаменатель)

$f_1=f_2=1, f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$ – числа Фибоначчи

1. Запишите явную формулу для n-го члена арифметической и геометрической прогрессий.

Пусть S_n – сумма n первых членов последовательности.

2. Запишите для арифметической и геометрической прогрессий а) рекуррентную б) явную формулу для последовательности S_n.

3. Каким из способов заданы следующие последовательности:
а) последовательности из примеров выше;
б) k_n – количество чисел меньших n в десятичной записи которых есть единица.
в) $a_n = \begin{cases} 2n-1, & \text{при нечетном } n; \\ n, & \text{при четном } n. \end{cases}$
г) наибольшее число частей, на которые могут разбить плоскость n прямых.

4. Последовательность задана общей формулой $a_n = \sqrt{n}$. S_n - это сумма n первых членов последовательности a_n. Напишите рекуррентную формулу для последовательности S_n.

5. а) Сумма первых n членов последовательности задана формулой $S_n = n^2$. Найдите a_k.
б) То же для последовательности с $S_n = n^3$
в) То же для последовательности с $S_n = 1 - 1/n$.

6. а) Последовательность задана общей формулой $a_n=n^2$. Найдите явную формулу для S_n
б) Найдите явную формулу для суммы $1+4+9+...+n^2$.

7. Известно, что бесконечная последовательность задана формулой и известно, что $a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$. Верно ли, что $a_n - a_{n-1} = a_2 - a_1$?

8. Сколькими способами из шашечной доски 10×10 можно вырезать квадрат, разрезая по границам клеток?

9. В бесконечно возрастающей геометрической прогрессии все члены натуральны. Докажите, что ее знаменатель тоже натурален.

10. Все члены бесконечной возрастающей арифметической прогрессии – натуральные числа. Докажите, что найдется бесконечно много членов, начинающихся цифрами 2010.

11. Функция задана соотношениями $f(k,n)=f(k-1,f(k,n-1))$, $f(0,n)=n+2$, $f(k,1)=2$ при $k>0$
а) Найдите явные формулы для $f(1,n)$, $f(2,n)$, $f(3,n)$;
Покажите, что

б) $f(k,n)$ однозначно определено при натуральных k и n;
в) $f(k,n)\geq n+1$
г) Если $n>m$, то при всех k выполнено $f(k,n)>f(k,m)$.
д) $f(3,6)> 1000!^{1000!}$
е) $f(5,5)> 1000!^{1000!}$

Для самостоятельного решения

ПР1. Найдите сумму n первых членов последовательности 2, 4, 7, 12, 21, 38, 71, 136, …

ПР2. Может ли отношение двух чисел Фибоначчи быть равным 100?

ПР3. Существует ли непостоянная арифметическая прогрессия **а)** из 11, **б)** из бесконечного числа дробей вида $1/n$?

ПР4. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n, ... такова, что для всякого n уравнение $a_{n+2}x^2+a_{n+1}x+a_n=0$ имеет действительный корень. Может ли число членов этой последовательности быть **а)** равным 11; **б)** бесконечным?

ПР5. Возрастающая арифметическая прогрессия такова, что последовательность сумм цифр её членов тоже образует непостоянную арифметическую прогрессию. Может ли число членов быть **а)** равным 11; **б)** бесконечным?

ПР6. Найдите все возрастающие арифметические прогрессии, состоящие из простых чисел, со свойством: количество членов прогрессии конечно и больше, чем разность прогрессии.

ПР7. Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, ... есть числа a_1^2, a_2^2 и a_3^2. Докажите, что эта прогрессия состоит из целых чисел.

ПР8. Даны две бесконечные прогрессии: арифметическая a_1, a_2, a_3, … и геометрическая b_1, b_2, b_3, … , причем все числа, которые встречаются среди членов геометрической прогрессии, встречаются также и среди членов арифметической прогрессии. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии – целое число.