

Испытания и оценки

Пусть надо выявить один случай из N , и каждый вопрос делит все случаи на k групп, выясняя, в какую из групп попал искомый случай. Тогда жадный алгоритм состоит в том, чтобы делить на такие группы, чтобы размер наибольшей был как можно меньше (в идеале – на равные группы).

- а) Зритель задумывает одну из 100 карточек. За один ход фокусник может разложить все карточки на 10 кучек и узнать у зрителя, в какой из групп находится карточка. За какое наименьшее число вопросов фокусник может наверняка определить задуманную карту?
б) То же, но раскладывает на 5 кучек.
- Петя загадал натуральное число A от 1 до 8. Витя называет любое натуральное число X , и Петя отвечает, делится ли X на A . Может ли Витя наверняка угадать A после трёх таких вопросов?
- Есть 5 серебряных монет и 4 золотые (они отличаются по виду от серебряных). Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (учтите, что настоящая серебряная монета может отличаться по весу от настоящей золотой!). Если фальшивая монета серебряная, то она легче настоящих монет, а если золотая – то тяжелее. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно наверняка найти фальшивую монету?
- Незамкнутая цепочка составлена из 31 звена. Известно, что одно из звеньев – фальшивое, легче остальных. Какое наименьшее число звеньев придется разрезать, чтобы при помощи взвешиваний можно найти фальшивое звено?

Пространство вариантов

Чаше всего перед нами ситуация одного неизвестного варианта из некоторого множества (пространства) возможных элементарных вариантов. Полезно выписать все возможные варианты и делать такие испытания, чтобы количество подозрительных вариантов в наихудшем случае было как можно меньше.

- Задуманы два континента. За какое наименьшее число вопросов типа «Да/Нет» можно наверняка определить оба?
- Имеются 4 детали с маркировками 1 г, 2 г, 3 г и 4 г. Одна из них дефектная: более лёгкая или более тяжёлая, чем указано. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно наверняка узнать, какая из деталей дефектная и при этом определить, легче ли она или тяжелее, чем на ней указано?
- Десять монет, среди которых есть как настоящие, весящие по 10 г, так и фальшивые, весящие по 9 г, выложены в ряд. Известно, что каждая настоящая лежит левее любой фальшивой. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно наверняка определить все фальшивые монеты?
- Из 9 монет одна фальшивая – легче остальных. Имеются два экземпляра внешне неразличимых чашечных весов, из которых одни заедают (при любом взвешивании, в котором на чашах поровну монет, показывают равенство). За какое наименьшее число взвешиваний можно найти фальшивую монету?

Испытания и компоненты связности

Для оценки числа испытаний бывает полезно увидеть граф и применить неравенство для числа вершин V , ребер P и компонент связности K : $P+K \geq V$.

- Есть N камней разного веса. За одно взвешивание можно сравнить веса двух камней. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка найти самый тяжелый камень?
- Эксперту предъявлены 100 серебряных слитков весами 1001, 1002, ..., 1100 граммов, промаркированных по-китайски. У него есть весы, которые показывают вес груза, при условии, однако, что этот вес не более 2500 г. За какое наименьшее число взвешиваний эксперт сможет убедить судью, что он знает веса всех слитков?
- Есть $2n$ человек: n болеют за "Спартак" и n – за "Динамо". Можно спросить у любых двоих, за одну они болеют команду или за разные, и они честно ответят. Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это можно сделать?

Для самостоятельного решения

Ис0. Даны четыре одинаковых по виду шара массой 101 г, 102 г, 103 г и 105 г, а также весы со стрелкой (показывают вес груза). За какое наименьшее число взвешиваний можно определить массу каждого шара?

Ис1. Имеется 9 гирек-эталонов весом 100 г, 200 г, ..., 900 г, и чашечные весы без других гирь. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь она весит немного (не более чем на 10 г) легче, чем раньше. За какое наименьшее число взвешиваний можно определить облегченную гирьку?

Ис2. В этой задаче Петя может отвечать на вопросы «да», «нет» или «не знаю». Он загадал целое число от 1 до 81. Придумайте такие вопросы, чтобы за четыре вопроса угадать это число.

Ис3. Есть N камней разного веса. За одно взвешивание можно сравнить веса двух камней. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка найти самый тяжелый и самый легкий камень?

Ис4. Пусть среди 24 монет ровно половина – золотые. Одна из этих монет фальшивая, причем известно, что фальшивая серебряная легче настоящей серебряной монеты, а золотая – тяжелее. Если на чашу весов положить больше четырех золотых монет или больше четырех серебряных монет, весы сломаются (а если положить на каждую чашу ровно по 4 тех и других – то выдержат). Как найти ФМ за три взвешивания?

Ис5. У ведущего есть колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (при этом не уточняя – сверху вниз или снизу вверх). Разрешается задавать ведущему вопросы вида «Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?». Один из зрителей подсмотрел, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопросов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?

Ис6. Взвешивания за плату. а) У бедного мальчика Саши всего 169 монет, причем одна из них лёгкая ФМ. У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берет с Саши плату: 1 рубль, если одна из чашек перевесила, и 2 рубля, если весы остались в равновесии. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить ФМ с помощью Костиных весов?

б) У бедного мальчика Саши всего 300 монет, и ровно одна из них лёгкая ФМ. У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берет с Саши плату: 2 рубля, если перевесила левая чашка, и 1 рубль при любом другом исходе. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить ФМ с помощью Костиных весов?

Ис7. В ряд лежат 8 монет, при этом из левых четырех одна фальшивая и из правых четырех тоже одна (обе фальшивые легче настоящих и равны по весу друг другу). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно наверняка определить, сколько настоящих монет лежит между парой фальшивых (сами фальшивые монеты определять не обязательно).

Ис8. Есть N карт, из которых задумана одна. Разрешается разложить карты на стопки с разным числом карт и спросить, в какой из стопок задуманная карта. При каких N можно найти задуманную карту за два таких вопроса?

Интернет-кружок 9 класса, Набережные Челны. Рук. А.Шаповалов, ноябрь 2010 г. <http://www.ashap.info/Uroki/Chelny1/index.html>