Жадный алгоритм

Алгоритм – это способ достижения цели через жестко определенную последовательность шагов. Когда в ответе надо предъявить алгоритм, естественно рассматривать его как составную конструкцию. Типичные примеры: выигрышная или ничейная *стратегия* в играх. Кроме того, алгоритмы регулярно возникают в задачах на испытания. Если цель – максимум какой-то величины, то ее часто достигают с помощью «жадного алгоритма», то есть добиваясь максимально возможного приращения на каждом шаге.

1. На столе лежат карточки со 100 последовательными числами. Двое игроков по очереди берут по карточке пока не разберут все. Тот, у кого сумма меньше, выплачивает разность сумм противнику. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?
2. На блюде лежат 10 кусков сыра. Сначала Вася может разрезать каждый кусок на два. Затем Петя берет себе один из полученных кусков, потом Вася – один из оставшихся кусков, затем снова Петя и т.д. пока не разберут весь сыр. Каждый старается получить как можно больше. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

Бывает полезно ввести вспомогательную величину для оптимизации.

3. За какое наименьшее число ходов конь может пройти из левого нижнего угла доски 100×100 в правый верхний?
4. На плоскости нарисован черный равносторонний треугольник. Имеется десять треугольных плиток того же размера и той же формы. Нужно положить их на плоскости так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть черного треугольника (хотя бы одну точку *внутри* него). Как это сделать?

Отклонение от жадности

Часто можно показать, что жадный алгоритм не достигает результата. Доказав недостижимость, подумайте, нельзя ли из этого извлечь указания, и достичь результата, следующего за жадным.

5. $ABCD$ – квадрат со стороной 8. Разрешено делать шаги длины 1, не выходя за пределы квадрата. За какое наименьшее число шагов можно пройти из A в C?
6. В банке работают 2002 сотрудника. Все сотрудники пришли на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 доллара. Какой наибольшей может быть разница двух зарплат сотрудников этого банка, если известно, что все зарплаты сотрудников различны?
7. а)На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу – белые, вверху – черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые – вверху?
   б) То же для доски 9×9.
8. Назовем треугольники *сходными*, если у них совпадают по длине по две стороны. За один ход можно заменить треугольник на сходный. За какое наименьшее число ходов можно из правильного треугольника со стороной 10 получить правильный треугольник со стороной 1?

Для самостоятельного решения

1. На блюде лежат 15 кусков сыра двух весов. Сначала Вася может разрезать некоторые из этих кусков (но не все) каждый на две части. Затем Петя берет себе один из кусков, потом Вася – один из оставшихся кусков, затем снова Петя и т.д. пока не разберут весь сыр. Каждый старается получить как можно больше. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?
2. В этой задаче Петя может отвечать на вопросы «да», «нет» или «не знаю». Он загадал целое число от 1 до 81. Придумайте, как за четыре вопроса угадать это число.
3. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида “уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника”, где a, b – действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов конечен и одинаков, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника – нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый)?
4. На первой горизонтали шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а на последней – 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут обменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди, по одному ферзю за ход.
5. **а)** 100 карточек в стопке пронумерованы числами от 1 до 100 сверху вниз. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или нескольку карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение всех чисел на карточках станет кратно 1000000. Каков будет результат игры при правильной игре сторон?

   б) Тот же вопрос при $N!$ карточек, выигрывает тот, у кого первого произведение разделится на $N!$
6. На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже написанных одинаковых числа n и написать вместо них числа $n + 1$ и $n - 1$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2005?