Увидеть граф-2. Чередование, счет, перегородки

Чередование

Определение. Граф – двудольный, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета. Пример: любое дерево.

1. Докажите, что следующие графы – двудольные
   а) Вершины графа – расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.
   б) Тоже, что (а) для n фишек.
   в) Вершины – перестановки из n чисел 1, 2, ..., n, ребра – расположения, получающиеся друг из друга перестановкой двух соседних чисел.
   г) Вершины – перестановки из n чисел 1, 2, ..., n, ребра – расположения, получающиеся друг из друга перестановкой двух любых чисел.
2. Пусть Г – двудольный граф с черными и белыми вершинами.
   а) Если в Г есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета – поровну.
   б) Если в Г есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа черных вершин не более чем на 1.
3. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

Считаем ребра и вершины

4. В ряд выписаны несколько целых чисел. Сумму одного или нескольких подряд записанных чисел назовем *последовательной*.
   а) Выписаны 10 чисел. Докажите, что найдется последовательная сумма, кратная 10.
   б) Выписаны 11 чисел. Докажите, что найдутся две последовательные суммы, кратные 10.
   в) Выписаны 20 чисел. Каково наибольшее число нечетных последовательных сумм?

5. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

Граф границ

6. Ладья, делая ходы по вертикали и горизонтали на соседнее поле, за 64 хода обошла все поля шахматной доски и вернулась на исходное поле. Докажите, что найдутся три хода подряд все в разных направлениях (то есть «вперед, вбок, назад»).
7. Раскрашенный в чёрный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу. Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?
8. Клетки прямоугольной клетчатой доски покрашены в синий и желтый цвета так, что крайняя нижняя горизонталь – синяя. Известно, что ладья не может пройти с нижнего края до верхнего по синим клеткам не прыгая через желтые. Докажите, что
   а) червяк может проползти по границам синих и желтых клеток от левого края до правого.
   б) король может пройти по желтым клеткам от левого края до правого.

Для самостоятельного решения

ГП1. Промежуток из одного или несколько подряд идущих дней назовем нечетным, если нечетное число из этих дней были дождливыми. Каково наибольшее возможное число нечетных промежутков в июле?

ГП2. а) Отмечены вершины и центры граней куба и проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

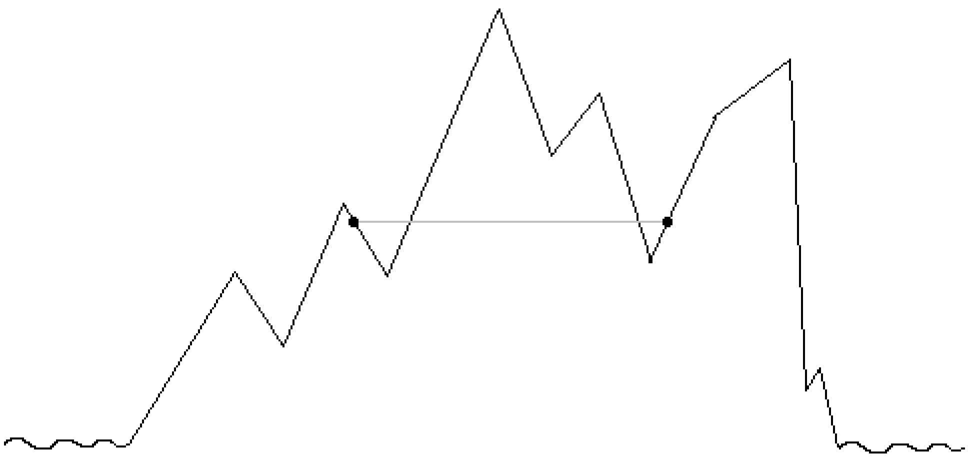
б) В кубике Рубика 3×3×3 отмечены вершины клеток, середины сторон клеток и центры клеток. Центры клеток соединены отрезками с серединами сторон клеток. Можно ли по проведенным отрезкам и сторонам клеток обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

ГП3. Ладья, делая ходы по вертикали и горизонтали на соседнее поле, за 64 хода обошла все поля шахматной доски и вернулась на исходное поле. Докажите, что число ходов по горизонтали не равно числу ходов по вертикали.

ГП4. а) Найдется ли правильный треугольник с вершинами в узлах квадратной сетки?

б) У сломанного циркуля нельзя изменить расстояние между концами ножек. Пете удалось поставить циркуль так, что его концы оказались в двух узлах клетчатой бумаги. Петя шагает циркулем, поочередно оставляя одну ножку на бумаге, а другую перенося в новый узел. Может ли Петя вернуть циркуль в исходные точки так, чтобы ножки поменялись местами?

ГП5. Двое флатландцев спускаются с высочайшей вершины Флатландии «Пик кипа» – один по левому склону, другой по правому. Гора везде выше уровня моря, а ее поверхность — график кусочно-линейной непрерывной функции. Флатландцы двигаются «непрерывно».



а) Нарисуем горизонтальную числовую ось так, что вершина проектируется в 0. Пусть x и y – проекции флатландцев. Отметим на координатной плоскости множество точек, соответствующее положениям флатландцев на одинаковой высоте. Докажите, что получится набор отрезков.

б) Рассмотрите этот набор отрезков как граф, и найдите на нем все вершины нечетной степени.

в) Докажите, что флатландцы могут достичь моря, все время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря.