Увидеть граф

Позиции и ходы

1. а) На прямой сидят два кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого. Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 777 прыжков?
   б) То же, но кузнечиков не два, а три.
2. В ряд расположены n пронумерованных фишек. За один ход разрешается прыгнуть фишкой вправо ровно через k фишек. Известно, что при данных n и k такими ходами можно, стартовав из позиции А, расставить номера по возрастанию. То же верно для позиции В. Докажите, что такими ходами можно из А получить В.
3. На шахматной доске 5×5 расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка – единственная.

Пары. Разбиение на циклы

4. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку.
   а) Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета.
   б) Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.
5. В строку выписаны n различных чисел. За одну операцию можно поменять местами два любых числа. За какое наименьшее число операций можно гарантировано расставить числа по возрастанию?

Считаем ребра и вершины

Определение. У графа G^*, дополнительного к графу G, вершины те же, а пара вершин в G^* связана ребром $\Leftrightarrow$ она не связана ребром в G.

6. Даны 10 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Известно, что среди попарных сумм a_i+a_j ($i \neq j$) как минимум 37 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ – целые.
7. На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 55 другими. Найдите n. (Укажите все возможности.)

Для самостоятельного решения

УГ0. 30 школьников решили 30 задач. Известно, что каждый решил по 2 задачи, и каждую задачу решило 2 человека. Докажите, что можно попросить каждого школьника рассказать одну из решенных им задач так, чтобы все задачи были рассказаны.

УГ1. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

УГ2. Дана таблица $(n–2)\times n$, $n > 2$, в каждой клетке которой записано целое число от 1 до n, причем в каждой строке все числа различны и в каждом столбце все числа различны. Докажите, что эту таблицу можно дополнить до квадрата $n\times n$, записав в каждую новую клетку какое-нибудь целое число от 1 до n так, чтобы по-прежнему в каждой строке и в каждом столбце числа были различны.

УГ3. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки.
а) Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.
б) Пусть теперь на каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Докажите, что если из расположения А можно получить расположение Б, то из Б можно получить А.
в) В условиях (б) докажите, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое.

УГ5. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?