Как такое может быть?

Пример

Каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника *ABCD* разбивает его на два равнобедренных треугольника. Какие значения может принимать угол между диагоналями?

Решение.

Заметим, что если у двух треугольников разбиения совпадают основания, то серединный перпендикуляр к общему основанию проходит через две вершины, противоположные основаниям, то есть через две другие вершины четырехугольника. Такое возможно, только если общее основание – это диагональ.

При разбиении одной диагональю возможны 4 случая примыкания двух равнобедренных треугольников: 1) основаниями 2) боковыми сторонами так, что у оснований есть общая вершина 3) боковыми сторонами так, что у оснований нет общей вершины 4) основание к боковой стороне.

Случай 1) В силу замечания диагонали перпендикулярны.

Случай 2) Пусть AB=AC=AD. В ∆BCD в силу замечания ни BC, ни CD не являются основаниями. Значит, основание – это BD, треугольники BCD и ABD примыкают основаниями, и искомый угол =90°.

Случай 3) Пусть AD=AC=BC=s. Пусть BD=t. По неравенству треугольника AC+BD>AD+BC, то есть t>s. Рассмотрим два подслучая.

3а) Еще одна сторона четырехугольника равна s, например, AB=s. Но это случай 2!

3б) Больше нет сторон длины s. Значит, в треугольниках ABC и ADC отрезки длины s – основания, отсюда AB=BD=DC=t. Но по неравенству треугольника AC+BD>AB+CD, то есть s+t>2t ⇔ s>t – противоречие.

Случай 4) По *обеим* диагоналям боковая сторона примыкает к основанию (иначе случай уже разобран). Если где-то боковая сторона равна основанию, то возникает как миниму 4 равных отрезка, и случай тоже сводится к разобранным. Остается такой случай: AB=BC=CD=s, BD=AD=AC=t. Далее простым подсчет углов находим, что угол между диагоналями равен 72°.

Замечания. 1. Нетривиальный пример с 72° угадывается: искомый четырехугольник – это часть *правильного* пятиугольника. Конечно, угадав пример, мы не избавимся от перебора, но увеличим шанс сделать перебор более компактным.

2. Обратите внимание, как две леммы (о совпадении оснований и неравенство сумм диагоналей и сторон) помогают сократить перебор.

3. При проведении перебора надо пояснять, почему рассмотрены *все* случаи. Можно рассматривать составные случаи, которые делятся на подслучаи. Однако очень рискованно опускаться до рассмотрения «подподслучаев»: опасность что-то пропустить сильно повышается. Если такая потребность возникает, воспринимайте ее как сигнал, что перебор надо как-то сократить – например, за счет доказательства свойств (лемм), или за счет «равноправия» диагоналей или применения принципа крайнего («рассмотрим наибольший угол, наибольшую сторону» и т.п.). Вообще, доказательство свойств сокращает количество логических возможностей, поэтому почаще задавайте себе вопрос: *как такое может быть?*

Придумать, раскручивая

1. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Осталось 5 корок. Как такое может быть, если корок никто не грыз?
2. Числа a,b,c нечетны и не являются точными квадратами. Может ли произведение $a^b b^c c^a$ быть точным квадратом?
3. Руслан, Жора и Денис сдавали 10 задач. Большинство задач Жора сдал раньше Руслана, Руслан – раньше Дениса, а Денис – раньше Жоры. Как такое могло быть?
4. Можно ли разрезать какой-нибудь треугольник на четыре выпуклые фигуры: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник?

Понять, как такое могло быть, и использовать это

5. а) Существует ли натуральное число n такое, что у n и n+2009 одинаковая сумма цифр?
   б) Тот же вопрос про n и n+333?
   в) Оцените снизу количество пятизначных n таких, что у n и n+9 одинаковая сумма цифр.
6. Незнайка пытался уложить 9 монет в клетки квадратика 3×3 так, чтобы их веса образовали магический квадрат (в каждом ряду из трех клеток – по вертикали, горизонтали и двум диагоналям – сумма весов была одной и той же). Повозившись, он со вздохом сказал, что семь сумм точно равны между собой, а восьмая то ли равна им, то ли чуть меньше. За какое наименьшее число взвешиваний можно на чашечных весах без гирь найти ряд с отличающейся суммой или убедиться, что такого ряда нет?
7. Барон Мюнхгаузен каждый день ходил на охоту, а возвратившись, говорил: «Сегодня я убил уток больше, чем позавчера, но меньше, чем неделю назад».
   а) Могли ли его слова 7 дней подряд быть правдой? б) Какое наибольшее число дней подряд эти слова могли быть правдой?
8. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A$=85°, $\angle B$=115°, $AD=BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M. Найдите $\angle MAB$.

Задачи на дом.

1. Рассматриваются тройки целых чисел a, b и c, для которых выполнено условие: $a + b + c = 0$. Для каждой такой тройки вычисляется число

$$d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}.$$

а) Может ли случиться, что $d = 2$?
б) Может ли случиться, что d – простое число?

2. Есть 6 кусков сыра разного веса. Известно, что можно разложить сыр на две кучки по три куска так, чтобы кучки весили поровну. Как можно сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь, если про любые два куска «на глаз» видно, какой весит больше?

3. Диагонали четырехугольника перпендикулярны. Найдите его углы, если известно, что три из них равны, а все стороны четырехугольника различны.

4. Правильный треугольник со стороной 9 разбит на 81 клетку – правильные треугольники со стороной 1. У клеток всего 55 вершин, в каждую вершину положили по монете. Известно, что у всех клеток, кроме одной, суммарные веса монет в вершинах одинаковы, а у этой одной – меньше. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти «легкую» клетку?

5. а) 100 гирек веса 1, 2, …, 100 г разложили на две чаши весов так, что есть равновесие. Докажите, что можно убрать по две гирьки с каждой чаши так, что равновесие не нарушится.
б) Рассмотрим такие n, что набор гирь 1, 2, ..., n г можно разделить на две части, равные по весу. Верно ли, что для любого такого n, большего 3, можно убрать по две гирьки из каждой части так, что равенство весов сохранится?

6. Для каждого целого неотрицательного числа i определим число $M(i)$ следующим образом: запишем число i в двоичной форме; если число единиц в этой записи четно, то $M(i) = 0$, а если нечетно – то 1 (первые члены этой последовательности: 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, ...).
а) Рассмотрим конечную последовательность $M(0), M(1), ..., M(1000)$. Докажите, что число членов этой последовательности, равных своему правому соседу, не меньше 320.
б) Рассмотрим конечную последовательность $M(0), M(1), ..., M(1000000)$. Докажите, что число таких членов последовательности, что $M(i) = M(i + 7)$, не меньше 450000.

7. Имеется набор гирь, веса которых в граммах: 1, 2, 4,... , 1024 (последовательные степени двойки) – по одной гире каждого веса. Груз разрешается взвешивать с помощью этого набора, кладя гири на обе чашки весов.
Докажите, что никакой груз нельзя взвесить этими гирями более чем 144 способами.