Задачи для знакомства

1. Выписали все натуральные числа меньше миллиарда, у которых сумма цифр делится на 19. Докажите, что их сумма тоже делится на 19.

2. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Докажите, что если окружность, проходящая через точки A, B и O, касается прямой BC, то окружность, проходящая через точки B, C и O, касается прямой CD.

3. Каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника разбивает его на два равнобедренных треугольника. Какие значения может принимать угол между диагоналями?

4. Имеется набор гирь, веса которых в граммах: 1, 2, 4,... , 1024 (последовательные степени двойки) – по одной гире каждого веса. Груз разрешается взвешивать с помощью этого набора, кладя гири на обе чашки весов. Докажите, что никакой груз нельзя взвесить этими гирями более чем 144 способами.

5. Последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots$ определяется условиями: $x_1=25$; $x_2=2009$; $x_{n+2}=x_n-(1/x_{n+1})$ при $n\geq 1$.
   Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль. Найдите номер этого члена.

6. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство:
   $$a^3 + b^3 + 3abc > c^3.$$

7. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

8. Даны 9 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Известно, что среди попарных сумм a_i+a_j $(i \neq j)$ как минимум 29 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_9$ – целые.

9. Многоугольник (не обязательно выпуклый) удалось разрезать на 20 меньших равных многоугольников, подобных исходному. Обязательно ли исходный многоугольник – параллелограмм?

10. Можно ли в таблицу 3×3 записать 9 различных натуральных чисел так, чтобы суммы в строках были равны между собой, а произведения в столбцах – равны между собой?