

ОЙЛЕРОВИ ПЪТИЩА И ОБХОДНИЯ

Определение. Път, който минава по всеки ръб (насочен или ненасочен) на граф еднократно, се нарича **оилеров**. Затвореният оилеров път се нарича **оилеров цикъл**.

Теорема 1. а) Нека за граф съществува незатворен оилеров път. Тогава степените на двата края на този път са нечетни, а степените на всички остали върхове са четни.

б) Нека за граф съществува оилеров цикъл. Тогава степените на всички върхове са четни.

2. В равнина са начертани няколко окръжности. От всяка точка на тези окръжности мравката може да се придвижи до всяка друга точка, без да напуска тези окръжности. Докажете, че има затворен път, който минава по всяка от дъгите на всички окръжности точно по един път.

Лема 3. Ако степените на всички върхове на граф са четни, то той може да се представи като обединение на цикли така, че всеки ръб участва точно в един цикъл.

Теорема 4. Даден е свързан граф.

а) Ако степените на всички върхове са четни, то в него съществува оилеров цикъл;

б) Ако степените на точно два върха са нечетни, то в него съществува оилеров път с краища в нечетните върхове.

5. Докажете, че съществува ред от 37 цифри, различни от 0, такъв, че всеки две различни цифри, някъде в този ред, са една до друга.

Теорема 6. Ако за насочен свързан граф от всеки връх излизат толкова стрелки, колкото и влизат в съответния връх, то за този граф съществува оилеров цикъл.

7. Докажете, че съществува редица от 82 цифри, в която може да се открият всички двуцифрени числа, които не са кратни на 10.

8. Квадрат 4×4 е разделен на единични квадратчета (квадратчета със страна 1). Може ли получената мрежа, образувана от страните на единичните квадратчета да се представи като обединение на:

а) осем начупени линии с дължина 5;

б) пет начупени линии с дължина 8?

9. В свързан граф всеки ръб е син или червен. От всеки връх излизат равен брой сини и червени ръбове.

Докажете, че между всеки два върха съществува път, за който цветовете на ръбовете задължително се редуват.

Още задачи

ОП1. От парче тел с дължина 12dm трябва да се изработи модел на куб с ръб 1dm. На колко части най-малко трябва да се раздели парчето тел?

ОП2. Картата на един град изглежда като квадрат 3×3 , като всеки от деветте по-малки квадрати на които е разделена картата изобразява квартал на града. Страната на всеки от малките квадрати изобразява улица с дължина 100m (включително и страните на квадраите по външния контур, контура на големия квадрат). Какъв най-малък път трябва да измине кола, за да премине всяка улица на града?

ОП3*. Ключалката на една врата се кодира с 10 бутона на които са означени цифрите от 0 до 9. За да се отключи ключалката, трябва да се натиснат 4 бутона в точно определен ред (като всеки опит е независим от предходните). Докажете, че за да сме сигурни, че ключалката е отключена, е необходимо да натиснем не повече от 10003 бутона.

ОП4. а) Върху разграфена на квадратчета повърхност, по всеки хоризонтал и по всеки вертикал, са разположени по 4 или по 6 фигури. Винаги ли е възможно да вземем няколко фигури така, че по всеки хоризонтал и по всеки вертикал, да са разположени точно по две фигури.

б*) Същият въпрос, ако по всеки хоризонтал и по всеки вертикал, са разположени не по-малко от две фигури.