

ЭЙЛЕРОВЫ ПУТИ И ОБХОДЫ

Определение. Путь, проходящий по каждому ребру (ориентированного или неориентированного) графа ровно один раз, называется *эйлеровым*. Замкнутый эйлеров путь называется *эйлеровым циклом*.

Теорема 1. а) Пусть в графе есть незамкнутый эйлеров путь. Тогда степени двух концов этого пути нечетны, а степени всех остальных вершин четны.

б) Пусть в графе есть эйлеров цикл. Тогда степени всех вершин четны.

2. На плоскости нарисованы несколько окружностей так, что с любой можно перейти на любую, не сходя с этих окружностей. Докажите, что тогда существует замкнутый путь, проходящий по всем участкам всех окружностей ровно по разу.

Лемма 3. Если в графе степени всех вершин четны, то его можно представить в виде объединения циклов так, что каждое ребро входит ровно в один цикл.

Теорема 4. Дан связный граф.

а) Если степени всех вершин четны, то в нем есть эйлеров цикл;

б) Если степени ровно двух вершин нечетны, то в нем есть эйлеров путь с концами в нечетных вершинах.

5. Докажите, что есть строка из 37 ненулевых цифр, в которой каждая пара различных цифр где-то стоит рядом.

Теорема 6. Если в ориентированном связном графе из каждой вершины выходит столько же стрелок, сколько в неё входит, то в нём есть эйлеров цикл.

7. Докажите, что есть последовательность из 82 цифр, в которой можно подчеркнуть любое двузначное число, не кратное 10.

8. Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата 4×4 представить в виде объединения

а) восьми ломаных длиной 5;

б) пяти ломаных длиной 8?

9. В связном графе каждое ребро синее или красное. Из каждой вершины синих и красных ребер выходит поровну. Докажите, что между любыми двумя вершинами есть путь, где цвета ребер строго чередуются.

Еще задачи

ОП1. Из куска проволоки длиной 12 дециметров требуется спаять каркас куба с ребром в 1 дм. На какое наименьшее число частей придется предварительно разрезать этот кусок?

ОП2. Город в плане выглядит как квадрат 3×3 , каждая сторона квартала-квадратика – участок улицы длиной 100м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы?

ОП3* На кодовом замке 10 кнопок с цифрами от 0 до 9. Для открытия кодового замка нужно нажать 4 кнопки в определенном порядке (при этом предыдущие нажатия не важны). Докажите, что замок можно наверняка открыть, сделав не более 10003 нажатий.

ОП4. а) На каждой горизонтали и каждой вертикали клетчатой доски стоит по 4 или по 6 фигур. Всегда ли можно убрать несколько фигур так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали стояло ровно по две фигуры?

б*) Тот же вопрос, если на каждой горизонтали и каждой вертикали шахматной доски стоит не менее двух фигур.