Подсчет двумя способами в графах

1. На доске 11×10 (11 строк, 10 столбцов) расставлены фишки. Может ли во всех строках быть разное количество фишек, а во всех столбцах – одинаковое?

2. Каково наибольшее возможное число рёбер

а) в графе с n вершинами;

б) в двудольном графе с b белыми и r чёрными вершинами?

Определение. *Степенью* вершины называется число выходящих из неё рёбер.

Теорема 3. а) Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер.

б) В конечном двудольном графе сумма степеней белых вершин равна сумме степеней черных вершин и равна числу ребер.

4. Лемма о рукопожатиях. В конечном графе число вершин нечётной степени четно. (Это верно и для графов с кратными рёбрами и петлями).

5. а) В каждую клетку клетчатого прямоугольника $m\times n$ вписали число его соседей по стороне. Найдите сумму всех этих чисел.

б) Стефан по одной вписывает числа в клетки шахматной доски. Каждый раз он пишет число уже заполненых соседей по стороне. Когда все клетки заполнены, он считает сумму всех выписанных чисел. Докажите, что сумма не зависит от порядка заполнения клеток и найдите её.

6. Какое наибольшее число рёбер может быть в двудольном графе, если число вершин в нем равно **а)** 10; **б)** 21; **в)** $2m$; **г)** $2m+1$?

7. На числовой прямой отмечены точки с координатами 1, 2, 3, …, 21. Найдите количество отрезков нечетной длины с концами в отмеченных точках.

8. В строку выписано 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитана ее сумма (группы из одного числа тоже учитывались). Какое наибольшее количество сумм могло оказаться нечетными?

Ещё задачи

ДС1. В однокруговом теннисном турнире сыграли 10 мальчиков и 10 девочек. Число побед у всех мальчиков одно и то же. Девочкам давали по одному цветку за каждую победу над мальчиком. Могли ли все девочки закончить турнир с одинаковым числом цветов? (В теннисе ничьих не бывает)

ДС2. Ковбои всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым. Собрались как-то 50 ковбоев, и каждый сказал каждому из присутствующих одну из двух фраз: «У меня чётное число знакомых в этой компании» или «У меня нечётное число знакомых в этой компании».

а) Могло ли оказаться, что первая фраза произнесена ровно 2015 раз?

б) Какое наибольшее количество раз могла быть произнесена первая фраза?

ДС3* На шахматную доску по одному выставляются короли: первый – на любую клетку, а каждый следующий должен побить нечетное число ранее выставленных королей. Можно ли заполнить все клетки доски?

ДС4* В корзинах лежали разные фрукты, пустых корзин не было. Затем все фрукты переложили в ящики. Оказалось, что каждый фрукт попал в ящик с б*о*льшим общим весом фруктов, чем в той корзине, откуда его взяли. Докажите, что корзин больше, чем ящиков.