

2. Инварианти – стъпка по стъпка

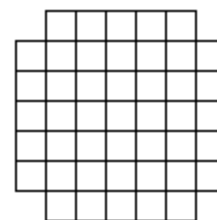
1. На всеки ход компютърът записва на екрана още едно число, което е по-голямо от предходното или със сбора на първите две цифри (ако този сбор от цифрите се дели на 4) или с 10 (ако този сбор от цифрите не се дели на 4). В началото на екрана е било само числото 13.

- А) Написани са 2000 числа. Има ли сред тях шестцифрени?
- Б) Написани са 1 000 000 числа. Има ли сред тях числото 444 444?

2. Триъгълник от картон е разрязан по права, на две части. След това всеки път се избира по една от всички части и също я разрязвали по права на две части. След час се получили повече от 100 части.

- А) Докажете, че поне една от тези части е триъгълник;
- Б) Сред частите има точно един триъгълник. Какво може да се каже за останалите части?

3. На дъска 7×7 без ъгловите квадратчета (виж чертежа) има 45 бръмбари, по един във всяка клетка. Всяка минута всички бръмбари едновременно пропълзват в произволна тяхна съседна по страна клетка. Колко най-много на брой бръмбари могат да се съберат в една клетка?



4. В три купчини има по 5, 8 и 18 камъка. При един ход може в една купчина да се добави един камък, а в друга – 5 камъка.

- А) Може ли след няколко хода, броят на камъните във всеки две от купчините да се различават с не повече от един камък?
- Б) Може ли след няколко хода, броят на камъните в трите купчини да е един и същ?

5. Вълкът и седемте козлета, наредени в редица играят следната игра: Всяка секунда двама от тях, стоящи през един, могат да скочат и да си разменят местата помежду си. Играта свършва, когато се подредят в обратен ред на първоначалния. Могат ли да свършат играта, без да нарушават правилата?

6. На екрана на компютъра е числото 76543210. Всяка секунда робот изважда от числото сумата от цифрите му. Докажете, че рано или късно ще се получи 9.

7. Първоначално на дъската са написани числата 10, 20, 30, 40, 50. Разрешено е да се избере едно от тях и да се раздели на просто число (но така, че да остане цяло), а едно от останалите да се умножи с просто число (например, 50 и 20 заменитъ на $50:5=10$ и $20 \cdot 7=140$).

- А) Докажете, че с тези операции не е възможно да се получи редицата от числа 20, 30, 40, 50, 60.
- Б) Незнайко смята, че може да се получи редицата от числа 20, 30, 40, 50, 60. В доказателството си той е записал 100 междинни редици от числа. Как бързо да открием грешната редица в неговото доказателство?

8*. На масата има 40 червени, 40 сини и 40 зелени пешки. Може да свалим от масата 2 пешки от различен цвят и вместо тях да сложим пешка от третия цвят. Колко най-малко пешки може да останат на масата?