

Включване и изключване

1. Колко от числата от 1 до 1000
а) се делят на 21; б) не са взаимнопрости с 21?
2. Колко събираеми има в произведението на двата многочлена $(1+x+2x^2+3x^3+\dots+10x^{10})(11x^{11}+12x^{12}+13x^{13}+\dots+20x^{20})$ след разкриването на скобите
а) до приведението на подобните;
б) след приведението на подобните?
3. Колко различни събираеми ще останат, ако разкрием скобите и приведем подобните едночлени в следния израз $(1+x^2+x^4+\dots+x^{30})^2+(1+x^3+x^6+\dots+x^{30})^2$?
4. Някои в класа гледат футбол, някои – анимации, но няма такива, които не гледат нито едното, нито другото. Средният успех на любителите на футбола по математике е по- малък от 4, на любителите на анимации – също. Може ли в класа като цяло средният успех по математике да бъде повече от 4?
Лема 5. а) Нека a числа удовлетворяват някакво свойство 1, b числа удовлетворяват свойство 2, и c числа удовлетворяват и двете свойства наведнъж. Тогава броят числа, удовлетворяващи поне едно от тези свойства, е $a+b-c$.
б) Нека a_1 числа удовлетворяват първото свойство, a_2 числа удовлетворяват второто свойство, a_3 числа удовлетворяват третото свойство, a_{12} удовлетворяват свойства 1 и 2, a_{13} удовлетворяват свойства 1 и 3, a_{23} удовлетворяват свойства 2 и 3, и a_{123} удовлетворяват всички три свойства. Тогава броят числа, удовлетворяващи поне 1 от тези свойства, е равен на $a_1+a_2+a_3-a_{12}-a_{13}-a_{23}+a_{123}$.
в) Сформулирайте аналогично твърдение за намиране на броя на обектите, удовлетворяващи поне едно от n свойства.
6. а) Колко естествени числа, по- малки от 1001, са взаимнопрости с 1001?
б) Колко естествени числа, по- малки от 2100, са взаимнопрости с 2100?
7. Сумата от цифрите на колко числа от 1 до 1000000 е равна на а) 9; б) 19; в) 29?
8. а) По колко различни начина може да се оцветят числата от 1 до n в син и червен цвят, така че всички цветове се използват?
б) Същият въпрос за 3 цвята.
в) Същият въпрос за 4 цвята.

1. Още задачи

ВИ1. Учениците от 9 клас решавали две задачи. В края на занятиято учителят съставил четири списъка: I – решили първа задача, II – решили само една задача, III – решили поне една задача, IV – решили и двете задачи.

Кой списък е най-дълъг? Могат ли два списъка да съвпадат по състав? Ако да, то кои?

ВИ2. Куб с ръб с дължина 20 е разбит на 8000 единични кубчета, и във всяко кубче е записано число. Известно е, че във всеки стълб от 20 кубчета, успореден на ръб на куба, сумата от числата е равна на 1 (разглеждат се стълбовете във всички три направления). В някое кубче е записано числото 10. През това кубче минават три слоя $1 \times 20 \times 20$, успоредни на стените на куба. Намерете сумата на всички числа извън тези слоеве.

ВИ3. По колко начина е възможно центъра на клетъчна дъска 100×100 да съединим с края на дъската чрез начупена линия, съставена от 50 диагонала на клетки?

ВИ4. На клетъчна хартия са построени няколко правоъгълника със страни, успоредни на линиите на мрежата и с общ център O в един от възлите на мрежата. С един въпрос е възможно за произволен възел да узнаем за колко правоъгълника той лежи вътре. Как с четири въпроса е възможно да узнаем колко правоъгълника съдържат само един възел O ?