

## Включение и исключение

- Среди натуральных чисел от 1 до 1000 сколько  
а) делящихся на 21; б) не взаимно простых с 21?
  - Сколько слагаемых будет в произведении двух многочленов  $(1+x+2x^2+3x^3+\dots+10x^{10})(11x^{11}+12x^{12}+13x^{13}+\dots+20x^{20})$  после раскрытия скобок  
а) до приведения подобных;  
б) после приведения подобных?
  - Сколько различных слагаемых останется, если раскрыть скобки и привести подобные в следующем выражении  $(1+x^2+x^4+\dots+x^{30})^2+(1+x^3+x^6+\dots+x^{30})^2$ ?
  - Кое-кто в классе смотрит футбол, кое-кто – мультики, но нет таких, кто не смотрит ни то, ни другое. У любителей футбола средний балл по математике меньше 4, у любителей мультиков – тоже. Может ли в классе в целом средний балл по математике быть больше 4? (Напомним, что среднее нескольких чисел – это сумма этих чисел, деленная на их количество.)
- Лемма 5.** а) Пусть  $a$  чисел удовлетворяют какому-то свойству 1,  $b$  чисел удовлетворяют свойству 2, и  $c$  чисел удовлетворяют обоим свойствам сразу. Тогда количество чисел, удовлетворяющих хотя бы одному из этих свойств, равно  $a+b-c$ .
- б) Пусть  $a_1$  чисел удовлетворяют первому свойству,  $a_2$  чисел удовлетворяют второму свойству,  $a_3$  чисел удовлетворяют третьему свойству,  $a_{12}$  удовлетворяют свойствам 1 и 2,  $a_{13}$  удовлетворяют свойствам 1 и 3,  $a_{23}$  удовлетворяют свойствам 2 и 3, и  $a_{123}$  удовлетворяют всем трем свойствам. Тогда количество чисел, удовлетворяющих хотя бы одному из этих свойств, равно  $a_1+a_2+a_3-a_{12}-a_{13}-a_{23}+a_{123}$ .
- в) Сформулируйте аналогичное утверждение для нахождения количества объектов, удовлетворяющих хотя бы одному из  $n$  свойств.
- а) Сколько натуральных чисел, меньших 1001, взаимно просты с 1001?  
б) Сколько натуральных чисел, меньших 2100, взаимно просты с 2100?
  - У скольких чисел от 1 до 1000000 сумма цифр равна а) 9; б) 19; в) 29?
  - а) Сколькими различными способами можно покрасить числа от 1 до  $n$  в синий и красный цвета так, чтобы все цвета были использованы?  
б) Тот же вопрос для 3 цветов.  
в) Тот же вопрос для 4 цветов.

## Ещё задачи

**ВИ1.** Ученики 9 класса решали две задачи. В конце занятия учитель составил четыре списка: I – решивших первую задачу, II – решивших только одну задачу, III – решивших по меньшей мере одну задачу, IV – решивших обе задачи. Какой из списков самый длинный? Могут ли два списка совпадать по составу? Если да, то какие?

**ВИ2.** Куб с ребром длины 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трех направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя  $1 \times 20 \times 20$ , параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоев.

**ВИ3.** Сколькими способами можно центр клетчатой доски  $100 \times 100$  соединить с краем доски ломаной, составленной из 50 диагоналей клеток?

**ВИ4.** На клетчатой бумаге построены несколько прямоугольников со сторонами, параллельными линиям сетки и общим центром  $O$  в одном из узлов сетки. За один вопрос можно про любой узел узнать, у скольких прямоугольников он лежит внутри. Как за четыре вопроса можно узнать, сколько прямоугольников содержит только один узел  $O$ ?