

Инвариант и подсчеты

Определение. Инвариант – это что-то (число, свойство), что не изменяется при разрешенных действиях (например, при разрезании не меняется сумма площадей частей фигуры). Типичные инварианты: четность, остаток по какому-то модулю, произведение или сумма всех чисел или остатков и т.п.

Если разрешенные преобразования инвариант сохраняют, то нельзя получить ситуацию с другим значением инварианта.

Четность, делимость и остатки

1. Можно ли монетами в 14 и 35 крон заплатить без сдачи сумму в 245 крон? А в 2005 крон?
2. Можно ли разменять 55 динаров десятью монетами достоинством в 1, 3, 5 и 7 динаров? А 13-ю монетами?
3. Банкомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 77 монет? А на 100 монет? А на 111?
4. Дети гуляют парами с орехами в карманах. В каждой паре у одного орехов вдвое больше, чем у другого. Может ли они у всех вместе быть ровно 1000 орехов?
5. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?
6. На острове живут 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. При встрече два хамелеона разного цвета одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что через некоторое время все хамелеоны станут одного цвета?

Инвариант можно применять для подсчетов и оценок.

7. Возле каждого из четырёх углов прямоугольного бассейна 10×25 м стояло по спортсмену. Тренер подошел к краю бассейна, и подозвал к себе всех спортсменов. Все подошли кратчайшими путями по кромке бассейна. Известно, что трое прошли в сумме 50 метров. Сколько прошел четвертый?
8. В банке 500 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 300 долларов или положить в него 18 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?
9. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Кучку какого наименьшего размера можно получить?