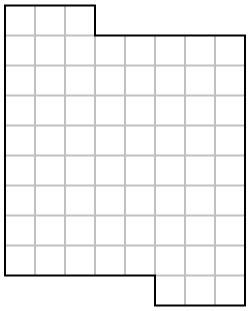
Тесни места

Който ни пречи, той ще ни и помогне.

В задачите, където строят и иследват коструkции, път към решението често ни дава тази част на конструкцията, където свободата на избора е най-малка. Такива места представляват препятствия за построяване на конструкцията, или изглеждат такива. Именно тях ние ще наричаме *тесни места*.



1. По колко различни начини можете да разрежете фигурата вдясно по границите на клетките на:
а) правоъгълници 1×5;
б) правоъгълници 1×7?

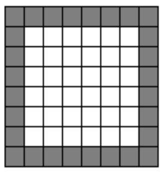
2. а) Две петцифрени числа зашифровали с думите УЗКИЕ и МЕСТА (както обикновено – еднаквите цифри заменили с еднакви букви, различните цифри – с различни букви). Двойка цифри (не обезателно съседни) образува *безпорядък*, ако лявата цифра е по-голяма от дясната. Може ли в изходните числа да няма безпорядъци?
б) Същото, но ако са получени думите УЗКОЕ и МЕСТО?

3. Крис има два куба. На всяка стена на кубовете тя иска да напише една от цифрите от 0 до 9. Може ли Крис така да нарисува цифрите на стените, че да се получи «календар»:
а) избирайки единият куб или и двата куба и нареждайки ги един до друг, на горните им стени да може да се получи произволно число от 1 до 31?
б) избирайки двата куба и нареждайки ги един до друг, на горните им стени да може да се получи произволна комбинация от 01 до 31?
(Не се разрешава цифрата 6 да се обърне и ползва като 9, както и обратното – 9 да се обърне и да се ползва като 6)

4. Решете ребуса I + АЗ + АЗ + АЗ + АЗ + АЗ + АЗ + АЗ + АЗ = WE (както обикновено, различните букви означават различни цифри, еднаквите букви – еднакви цифри).

5. а) Може ли числото 333 да се представи като сума на естествени събираеми така, че всяка от цифрите 0, 1, 2, …, 9 използвана точно по един път?
б) Може ли числото 400 да се представи като сума на естествени събираеми така, че всяка от цифрите 0, 1, 2, …, 9 използвана точно по един път?
в) Число то 444 представено като сумма сума на естествени събираеми така, че 9 от цифрите 0, 1, 2, …, 9 са използвани точно по един път, а десета цифра не е използвана. Каква цифра липсва?

6. Може ли да се разреже квадрат
а) на 30-ъгълник и 5 петоъгълника;
б) на 33-ъгълник и три десетоъгълника?



7. В клетъчния квадрат 8x8 крайните клетки са тъмни (вж. рис). Разрежете го на правоъгълници така, че във всеки от тях тъмните клетки са по-малко от светлите (в частност, може всички клетки да са светли). Колко най-много части е възможно да се използват?

8. а) Може ли числото 2012 да се представи като сума на пет естествени събираеми така, че всички използвани цифри да са различни?
б) А като сума на шест събираеми?

9. Сглобете клетъчен квадрат 7x7 от най-много правоъгълни части в три цвята така, че частите от еднакъв цвят не се докосват, даже по ъглите.

10. Естествено число не завършва на нула. Със сигурност ли може да му се намери кратно число, в записа на което всяка следваща цифра не е по-малка от предходната?

11. Може ли права да разбие някакъв шестоъгълник на 4 еднакви триъгълника?