

## Графы: подсчет ребер и связность

### Подсчет двумя способами

1. а) На игре каждый ученик решил по 3 задачи, а каждую задачу решило по 5 учеников. Сколько учеников участвовало в игре, если всего там было 15 задач?  
б) В двудольном графе 35 ребер. Чему равна сумма степеней черных вершин? А белых?

2. В городе Пятёркине каждая улица связывает две площади, и от каждой площади отходит 5 улиц. Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5.

3. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка – с четырьмя мальчиками. 17 из них любят играть в матбой, и в классе 13 столов (за столом сидит 1 или 2 человека). Сколько всего ребят в классе?

### Степени и связность

**Определение** Граф *связный*, если от любой его вершины можно пройти по ребрам до всех других вершин.

4. Связан ли граф коня а) на доске 3x3; б) на доске 4x4?

**Определение** Всякий граф распадается на связные куски, называемые *компонентами связности* (связный граф состоит из одной компоненты).

5. Какое наименьшее число компонент связности может быть в графе с 7 вершинами? А наибольшее?

6. а) По кругу растут 12 кувшинок. лягушка может прыгать через 3 пустые кувшинки на 4-ю. считаем кувшинки вершинами графа, а прыжки – ребрами. Сколько компонент связности в этом графе?

б) А если кувшинок 9?

в) А если кувшинок 10?

7. В графе стерли одно ребро. Как может измениться число компонент связности?

**8. Теорема.** Дан граф с  $N$  вершинами.

а) Если граф связан, то в нем не менее  $N-1$  ребер.

б) Если в графе  $K$  компонент связности, то в нем не менее  $N-K$  ребер.

9. В каркасе куба перерезали 8 ребер. Докажите, что каркас развалится на части.

10. Из спичек сложен квадрат, разбитый на 64 квадратные клетки со стороной в одну спичку.

а) В левой нижней клетке сидит жук, который не может переползти через спичку. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы жук мог доползти до любой ячейки?

б) В каждой угловой клетке сидит по жуку. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы до каждой клетки мог доползти хотя бы один из жуков?

в) Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы доска разбилась на 8 равных многоугольников?

г) Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы доска разбилась на 4 равных многоугольника?