

Графы: подсчет рёбер и вершин

Определение 1. Скажем, что задан *граф*, если задано множество его *вершин* и про любую пару вершин сказано, *связаны* они *ребром* или нет (будем рассматривать только пары из двух различных вершин).

Примеры. а) Граф знакомств: вершины – школьники, ребра – знакомства. б) Карта: вершины – страны, ребра – пары стран с общим участком границы. в) города и дороги; г) граф короля (коня, ладьи, ферзя...): вершины – клетки, ребра – пары клеток, связанных ходом короля (коня, ладьи, ферзя...).

1. а) Вершины и ребра графа – это вершины и ребра куба. Нарисуйте этот граф, чтобы ребра не пересекались. Сколько в этом графе вершин и ребер? Напишите для каждой вершины её степень и найдите сумму всех степеней вершин.

б) Вершины графа – клетки доски 2×3 , рёбра – ходы ладьи. Нарисуйте этот граф так, чтобы ребра не пересекались. Сколько в этом графе вершин и ребер? Напишите для каждой вершины её степень и найдите сумму всех степеней вершин.

2. а) Нарисуйте граф с 4 вершинами в котором каждая пара вершин связан ребром. Сколько в нём рёбер? Можно ли нарисовать этот граф так, чтобы рёбра не пересекались? Напишите возле каждой вершины её степень и посчитайте сумму степеней.

б) Нарисуйте граф с 5 вершинами в котором наибольшее возможное число рёбер. Сколько в нём рёбер? Нарисуйте этот граф так, чтобы пересечений рёбер было как можно меньше. Напишите возле каждой вершины её степень и посчитайте сумму степеней.

3. Какова наибольшая степень вершины в графе

а) коня на доске 8×8 ; **б)** ферзя на доске 8×8 ?

4. Сколько рёбер в графе короля на доске 4×4 ?

Лемма 5. Сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер.

6. а) В графе 12 вершин, из них 3 вершины степени 3, 4 вершины степени 4 и 5 вершин степени 5. Сколько в нем ребер?

б) В 13-угольнике провели 30 диагоналей, при этом из 3 вершин выходит по 3 диагонали, из 4 вершины – по 4 диагонали, из 5 вершин – по 5 диагоналей. Сколько диагоналей проведено из последней вершины?

в) В стране из каждого аэропорта летают ровно по 6 авиалиний в другие аэропорты страны, а всего есть ровно 30 линий между разными парами аэропортов. Сколько аэропортов в этой стране?

7. В классе учится 15 человек. Может ли у 4 учеников быть в классе ровно по 4 друга, у 5 учеников – ровно по 5 друзей и у 6 учеников – ровно по 6 друзей?

Лемма 8 (о рукопожатиях). В графе число вершин нечётной степени – чётно.

9. Можно ли расположить на столе 7 монет так, чтобы каждая касалась ровно трех других?

10. Борис по одному выставляет королей на шахматную доску, записывая для каждого, сколько ранее выставленных королей он побил. Доска заполнилась. Докажите, что сумма выписанных чисел не зависит от порядка выставления. Чему она равна?