Графы – 1. Циклы и цепочки

Когда есть объекты и нам интересны связи между парами объектов, это можно изобразить как граф (объекты – точки, ребра – линии между точками)

1. В Фейсбуке 9 одноклассников. Известно, что Пётр френд Ивана и Романа, Асен френд Ивану и Симеону, Борис – Веселину и Калояну, а также по френдами оказались Михаил с Калояном, Иван с Симеоном, Михаил с Веселином, Симеон с Романом и больше френдов среди этих одноклассников в Фейсбуке нет. Может ли Петр запустить новость так, чтобы переходя от френда к френду, она дошла до Калояна?

2. В трех вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

3. В верхних углах доски 3×3 стоят черные шахматные кони, а в нижних – белые. Как разместить коней одного цвета в противоположных клетках доски и сколько ходов для этого необходимо?

4. Можно ли на окружности расположить числа 0, 1, 2, …, 9 так, чтобы любые два соседних числа отличались на 3, 4 или 5?

5. На плоскости отметили 15 точек. Можно ли соединить их непересекающимися линиями так, чтобы любые две точки были соединены ровно одной линией?

Разбиение на циклы и цепочки

Определение. В графе есть *вершины*, некоторые соединены *рёбрами*. Если две вершины соединены, то только одним ребром. *Степень* вершины – это число выходящих из них рёбер.

Факт 1. Если в конечном графе степени всех вершин равны 2, то его можно разбить на циклы так, что у разных циклов не будет ни общих вершин, ни общих рёбер.

Факт 2. Если в конечном графе степени всех вершин не больше 2, то его можно разбить на непересекающиеся циклы и цепочки.

6. 20 школьников решили 20 задач. Известно, что каждый решил по 2 задачи, и каждую задачу решило 2 человека. Докажите, что можно попросить каждого школьника рассказать одну из решенных им задач так, чтобы все задачи были рассказаны.

7. а) В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Докажите, что можно организовать не менее 10 дежурств так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды.

б) Всегда ли можно организовать 11 дежурств?

8. После нескольких игровых дней однокругового футбольного чемпионата выяснилось, что любые пять команд можно так расположить по кругу, чтобы каждая команда сыграла со стоящими справа и слева. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня (в один день команда может сыграть не более одной игры).

9. Из доски 4×4 вырезаны все угловые клетки. Может ли шахматный конь обойти всю доску и вернуться на исходную клетку, побывав в каждой клетке ровно один раз?