

## Преброяване по два начина в графи

1. На дъска  $11 \times 10$  (11 реда, 10 стълба) са поставени пешки. Може ли във всички редове да има различен брой пешки, а във всички стълбове – еднакъв?
2. Колко най-много ребра може да има
  - а) в граф с  $n$  върха?
  - б) в двуделен граф с  $b$  бели и  $r$  черни върха?

Определение. Степен на връх наричаме броя на излизащите от този връх ребра.

Теорема 3. а) Сумата от степените на върховете на един граф е равна на удвоения брой на ребрата му.

б) В краен двуделен граф сумата от степените на белите върхове е равна на сумата от степените на черните върхове и е равна на броя на ребрата.

4. Лема за ръкостисканията. В краен граф броят на върховете с нечетна степен е четен. (Това е вярно и за графи с кратни ребра и примки).
5. а) Във всяка клетка на клетъчен правоъгълник  $m \times n$  написали броя на неговите съседни (по страна). Намерете сумата на всички тези числа.  
б) Стефан записва едно след друго числа в клетките на шахматна дъска. Всеки път той записва в съответната клетка броя на запълнените в този момент нейни съседни (по страна). Когато всички клетки са запълнени, той пресмята сумата на записаните числа. Докажете, че сумата не зависи от последователността, в която се запълват клетките и намерете тази сума.
6. Колко най-много ребра може да има в двуделен граф, ако броят на върховете в него е равен на
  - а) 10; б) 21; в)  $2m$ ; г)  $2m + 1$ ?
7. Върху числова ос са отбелязани точки с координати 1, 2, 3, ..., 21. Намерете броя на отсечките с нечетна дължина, с краища в отбелязаните точки.
8. В ред са написани 11 цели числа. За всяка група от последователно записани числа е пресметната нейната сума (групите от по едно число също се отчитат). Колко най-много суми могат да са нечетни?

### Още задачи

ДС1. Каубоите винаги казват истината на своите познати и лъжат своите непознати. Събрали се 50 каубоя и всеки казал на всекиго от присъстващите една от двете фрази: „Аз имам четен брой познати в тази компания” или „Аз имам нечетен брой познати в тази компания”.

- а) Може ли да се окаже, че първата фраза е произнесена точно 2015 пъти?
- б) Колко най-много пъти може да бъде произнесена първата фраза?

ДС2. На шахматна дъска един след друг се поставят царе – първият – в произволна клетка, а всеки следващ трябва да може да бие нечетен брой по-рано поставени царе. Може ли да се запълнят всички клетки на дъската?

