

Инвариант

Определение. Инвариант – это что-то (число, свойство), что не изменяется при разрешенных действиях (например, при разрезании не меняется сумма площадей частей фигуры). Типичные инварианты: четность, остаток по какому-то модулю, произведение или сумма всех чисел или остатков и т.п.

Если разрешенные преобразования инвариант сохраняют, то нельзя получить ситуацию с другим значением инварианта.

Четность, делимость и остатки

1. Можно ли монетами в 14 и 35 крон заплатить без сдачи сумму в 245 крон? А в 2005 крон?
2. Можно ли разменять 55 динаров десятью монетами достоинством в 1, 3, 5 и 7 динаров? А 13-ю монетами?
3. Банкомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 77 монет? А на 100 монет? А на 111?
4. Дети гуляют парами с орехами в карманах. В каждой паре у одного орехов вдвое больше, чем у другого. Может ли они у всех вместе быть ровно 1000 орехов?
5. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?
6. На острове живут 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. При встрече два хамелеона разного цвета одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что через некоторое время все хамелеоны станут одного цвета?

Раскраски

При раскрасках следят за количеством, разностью или четностью клеток того или иного цвета. Если раскраски нет, можно раскрасить самому.

7. а) Из клетчатой доски 20×20 вырезали одну угловую клетку. Можно ли разрезать оставшуюся доску на прямоугольники 2×1 ?
б) Из клетчатой доски 20×20 вырезали две угловые клетки: левую нижнюю и правую верхнюю. Можно ли разрезать оставшуюся доску на прямоугольники 2×1 ?
8. а) На доске 8×8 можно выделить любой прямоугольник из 4 или 6 клеток и перекрасить все клетки в нём в противоположный цвет. Можно ли доску, раскрашенную в шахматном порядке, сделать полностью белой?
б) Тот же вопрос для раскрашенной в шахматном порядке доски 7×7 , где вначале угловые клетки – черные.
9. На доске можно выделить любой прямоугольник, где есть клетки двух цветов, и перекрасить все клетки в нём в противоположный цвет. Можно ли такими операциями доску 8×8 , покрашенную в шахматном порядке, сделать полностью белой?
10. Можно ли клетчатую доску 10×10 разрезать на прямоугольники 4×1 ?