Испытания: оценка с конца

Представив пространство вариантов геометрически, можно рассматривать испытания как его покрытие заданными фигурами.

1. а) Какое наименьшее число королей можно расставить на клетчатой доске 9×10 так, чтобы они побили все свободные поля?

б) Петя задумал двузначное число. За одну попытку Вася называет двузначное число. Если каждая из цифр Васиного числа отличается не более чем на 1 от стоящей на том же месте цифры Петиного числа, то Вася выиграл. За какое наименьшее число попыток Вася может гарантированно выиграть?

Каждое испытание сводит задачу к меньшему числу случаев. Обратный ходом от меньшего к большему шаг за шагом получаем искомый алгоритм и нетривиальную рекуррентную оценку на число случаев и другие подобные величины.

2. Незамкнутая цепочка составлена из 31 звена. Известно, что одно из звеньев – фальшивое, легче остальных. Какое наименьшее число звеньев придется раскрыть, чтобы при помощи взвешиваний можно было найти фальшивое звено? (При раскрытии не крайнего звена цепочка распадается на три части: само звено, меньшая цепочка слева и меньшая цепочка справа).

3. Обезьяна хочет узнать, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился (или выяснить, что не разбивается ни с какого). У неё есть два одинаковых ореха. За каково наименьшее число бросков она может всё узнать наверняка?

4. Есть 15 одинаковых с виду монет, из них одна фальшивая, легче настоящей. Есть чашечные весы без гирь, у которых правая чаша вымазана краской. Как за 3 взвешивания выявить фальшивую монету, если монеты, побывавшие на правой чаше, нельзя после этого класть на левую?

5. а) Хлипкие весы – это чашечные весы без гирь. После того, как весы покажут, что одна из чаш перевешивает, они ломаются насовсем. Среди монет есть одна фальшивая, легче настоящих. При каком наибольшем числе монет можно наверняка найти фальшивку за 7 взвешиваний на хлипких весах? (Весы не жалко.)

б) Полухлипкие весы – это чашечные весы без гирь. После того, как весы *второй раз* покажут, что одна из чаш перевешивает, они ломаются насовсем. Среди монет есть одна фальшивая, легче настоящих. При каком наибольшем числе монет можно наверняка найти фальшивку за 5 взвешиваний на полухлипких весах? (Весы не жалко.)

Зачётные задачи

ОК1. У жильца в гостинице нет денег, но есть незамкнутая золотая цепочка из N звеньев. Хозяин согласен получать в уплату ровно по звену в день, без задержек, а гость не хочет платить вперёд. Хозяин готов давать сдачи ранее полученными звеньями. При каком наибольшем N они могут так расплачиваться N дней, если гость согласен раскрыть не более 4 звеньев цепочки? (При раскрытии не крайнего звена цепочка распадается на три части: само звено, меньшая цепочка слева и меньшая цепочка справа).

ОК2. У бедного мальчика Саши всего 49 монет, причем одна из них фальшивая, легче одинаковых по весу настоящих. У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берет с Саши плату: 1 рубль, если одна из чашек перевесила, и 2 рубля, если весы остались в равновесии. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить фальшивку с помощью Костиных весов?

ОК3. Есть 128 монет двух различных весов, монет каждого веса поровну. Как на чашечных весах без гирь гарантированно найти две монеты *разного* веса не более чем за 7 взвешиваний?

ОК4. Задумано натуральное число x от 1 до 144. Можно последовательно задать 10 вопросов вида «Верно ли, что $x>k$» (где k – любое конкретное число). Однако на любой вопрос, кроме 10-го, ответ дается только после того, как задан следующий вопрос (а на 10-й ответ даётся сразу). Как наверняка узнать задуманное число?