Свойства частичных конструкций

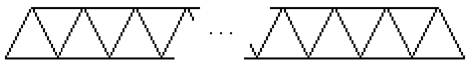
Выигрыш по стратегии «Путь на эшафот»: находим дорожку из позиций, ведущих к проигрышу и каждым ходом возвращаем соперника на неё. Обычно дорожка выделяется с помощью некоторого свойства (чаще всего – симметрии, тогда это называют симметричной стратегией).

1. Вначале на доске написано число 2019. Каждым ходом число можно уменьшить на любую из его ненулевых цифр (например, из 2018 можно получить 2018–2=2016, 2018–1=2017 и 2018–8=2010). Аня и Боря ходят по очереди, начинает Аня. Кто получит однозначное число, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Условие задачи накладывает на её элементы много ограничений. Надо оставить только те, что нам нужны, но зато уж поддерживать и сохранять их в процессе построения.

2. На каждой клетке доски 20x20 лежит по карточке с числом. В каждой паре соседей (клеток с общей стороной) числа – разные. Докажите, что карточки можно переложить в клетки полоски 2x200 так, чтобы по-прежнему в каждой паре соседей числа были разными.

3. Из 55 равносторонних треугольников сложена полоска (см. рис.). Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок красит неокрашенную сторону треугольника в красный или синий цвет по своему усмотрению. Нельзя красить так, чтобы у какого-то из треугольников все стороны стали одинакового цвета. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?



4. Петя задумал 100 нецелых чисел с *целой* суммой, не известной Васе. Петя выписывает числа красным цветом по одному. Ответным действием Вася округляет красное число до любого из двух ближайших целых (например, 3,14 можно округлить как до 3, так и до 4) и пишет его на доску синим цветом. Как Васе добиться, чтобы в конце сумма 100 красных чисел была равна сумме 100 синих чисел?

5. В ряд лежат 100 монет орлами вверх. Петя и Вася ходят по по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может ходить. За ход разрешается выбрать две монеты орлами вверх, между которыми лежат ровно 2 или ровно 3 монеты, и перевернуть выбранные монеты. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

6. 30 учеников идут парами, в каждой паре ученики разного роста. Докажите, что они могут стать в круг так, чтобы рост каждого отличался от роста его соседей.

7. 40 конфет разложены по 20 коробкам. Девочка и мальчик по очереди берут по одной конфете, первой выбирает девочка. Докажите, что мальчик может выбирать конфеты так, чтобы две последние конфеты оказались из одной коробки.

Зачётные задачи

СЧ1. В 10 одинаковых стаканов разлит квас, каждый заполнен не более, чем на 10%. За одну операцию можно выбрать стакан и отлить из него любое количество кваса поровну в остальные стаканы. Докажите, что не более чем за 10 таких операций можно добиться, чтобы во всех стаканах кваса стало поровну.

СЧ2. Петя и Вася ходят по очереди на доске 8x7, каждый своей ладьей; начинает Петя. Вначале ладьи стоят в противоположных углах, а все остальные поля заполнены пешками. Каждым ходом ладья должна что-нибудь съесть – пешку или ладью противника (ладьи ходят по вертикали или горизонтали на любое расстояние, но через занятые поля не перепрыгивают). Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто из игроков может выиграть как бы ни играл соперник?

СЧ3. На доске написаны числа от 1 до 666. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно заменить любые два числа на их сумму. Игра заканчивается, когда на доске останутся два числа. Петя хочет добиться, чтобы одно из них делилось на другое. Может ли Вася ему помешать?

СЧ4. В ряд лежат 100 гирь, их веса в граммах – целые, общий вес – чётный. Левая гиря весит 1г, следующая – не более 2 г, следующая – не более 3 г, и т. д. Докажите, что все гири можно разбить на две кучки равного веса.