

Счётчик движения к цели

Сложный пример часто строится не сразу, а шаг за шагом по некоторому алгоритму. Мы проходим по цепочке промежуточных конструкций. Каждая из них похожа на искомый пример лишь отчасти. Чтобы следить за продвижением к цели, полезно знать оставшееся или хотя бы пройденное расстояние. Найдём величину-счётчик, которая будет вести себя аналогично расстоянию: либо на каждом шаге расти, либо – убывать (не обязательно на 1 за шаг). Примеры счётчиков: число элементов, окрашенных правильно (оно растёт) или число пустых мест (оно убывает). Главное – устроить так, чтобы цепочка частичных конструкций и счётчик вели к нужному результату и помогали это доказать.

1. На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в 20 томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Как ему не более чем за 19 таких операций расставить тома строго по порядку?
2. На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Верхняя грань испачкана. Кубик прокатали по доске, перекачивая через ребра, так что он побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что испачканная грань ни разу не лежала на доске?
3. На столе стоят 144 стакана с водой. Разрешается выбрать любую группу из не более чем трёх стаканов и переливаниями внутри группы уравнивать количества воды в них. Как такими операциями добиться, чтобы во всех стаканах воды стало поровну?
4. В строку в беспорядке записаны по разу числа 1, 2, 3, ..., 16. За один ход разрешается поменять местами два числа, отличающиеся ровно на 1 (например, поменять местами 5 и 6, где бы они ни стояли). Докажите, что числа можно расставить по возрастанию не более чем за 120 ходов.
5. В ряд стоят три блюдца, на левом лежат 3 конфеты, среднее и правое – пустые. Петя берёт конфеты по одной. Когда он берёт конфету с какого-нибудь блюдца, то во всех блюдах справа от него число конфет дополняется до 9 (дед Мороз добавляет их из своего мешка). Какое наибольшее число конфет может набрать Петя?
7. У Гоши работает 10 сотрудников. Каждый месяц Гоша повышает зарплату на 1 рубль ровно девятерым (по своему выбору). Как Гоше повышать зарплаты, чтобы сделать их одинаковыми? (Зарплата - целое число рублей.)
- 8* Среди 50 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

Зачётные задачи

- ПЦ1.** Дано число 1. Каждым ходом Петя приписывает к нему справа цифру 1 или 2, а Вася меняет местами любые две цифры (возможно, одинаковые). Докажите, что Вася может действовать так, чтобы после его 100-го хода получился палиндром.
- ПЦ2.** У нескольких крестьян есть всего 512 овец. Если у кого-то оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть. (В случае двух половинок раскулачивают кого-то одного из двоих). Произошло 9 раскулачиваний. Докажите, что все овцы собрались у одного крестьянина.
- ПЦ3.** В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Олег вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Олег загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Олег каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.
- ПЦ4.** Дана клетчатая доска 1×100000 , вначале пустая, и куча из 100000 шашек. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом он выставляет 2 шашки из кучи на любые 2 пустые клетки. Своим ходом Вася снимает одну группу шашек, стоящих подряд, без пустых клеток между ними (может снять 1 шашку), и кладет их в кучу. Петя выигрывает, если после его хода на доске найдется группа из не менее 10 шашек подряд. Может ли Вася ему помешать?