Посредники в неравенствах

0. Точка X лежит по ту же сторону от серединного перпендикуляра к отрезку AB, что и точка A. Докажите, что AX<BX.

Идея. Чтобы доказать неравенство A<B можно выбрать *посредник* P и доказать, например, A<P и P≤B. Искусство состоит в выборе P. В зад.0 посредником была длина ломаной.

1. Докажите, что а) $1000001^5 > 99999^6$.; б) $\sqrt[3]{1001} > \sqrt[4]{9999}$.

2. В клетках таблицы 10×10 стоят 100 различных чисел. Макс выбрал в каждой строке максимальное число, и из этих 10 чисел выбрал наименьшее. Минька выбрал в каждом столбце наименьшее число, и из этих 10 чисел выбрал наибольшее. У кого из них число больше?

При сравнении сумм/произведений посредники можно выбирать для каждого слагаемого/сомножителя.

3. Докажите, что 100<1+3/2+4/3+5/4+….+101/100<134.

4. Докажите, что ½·2/3·4/5·6/7· … ·$(p$-1)/$p \geq 1/n$ (в знаменателях – (n-1) первых простых чисел).

5. На доске было написано равенство. Дежурный по классу успел стереть некоторые цифры (сколько цифр он стёр в каждом из чисел, неизвестно). На доске осталось:

11... 73×12... 65 = 123... 45.

Могло ли исходное равенство быть верным?

6* Квадрат со стороной 1 разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из двух меньших сторон (если прямоугольник – квадрат, то выбрали любую из четырёх сторон). Докажите, что сумма всех выбранных сторон не меньше 1.

Посредники могут образовывать цепочку: $A<P_1<P_2<\ldots<P_n<B$. Часто такую цепочку можно получить, начав менять A шаг за шагом, пока не получится B.

7. Треугольник лежит внутри другого треугольника. Докажите, что наибольшая сторона внутреннего не превосходит наибольшей стороны внешнего.

8. Выпуклый многоугольник лежит внутри другого выпуклого многоугольника. Докажите, что периметр внутреннего – меньше.

9. Есть 100 пар дедов Морозов со Снегурочками, каждый выше своей Снегурочки. Докажите, что если распределить Снегурочек по росту (самому высокому – самую высокую, и т.д.), то все равно каждый дед Мороз окажется выше доставшейся ему Снегурочки.

10. а) Пусть $a \leq b$, $x \leq y$. Докажите, что $ay+bx \leq ax+by$.

б) *(Транснеравенство)* Пусть $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$., $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – перестановка чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в другом порядке. Докажите неравенство

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \geq x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n \geq x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1$$

Зачётные задачи

ПН1. 100 плохишей получили каждый по бочке варенья и корзине печенья. У каждого вес варенья отличается от веса печенья (в ту или другую сторону) не более чем на 5 кг. Докажите, что если и бочки, и корзины пронумеровать по убыванию веса, то у емкостей с одинаковыми номерами веса содержимого будут отличаться не более, чем на 5 кг.

ПН2. Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же клетчатой таблицы 8×8, заполненной 64 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т.д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Докажите, что сумма чисел, выбранных Яшей не больше суммы чисел, выбранных Юрой.

ПН3. Выбрано n натуральных чисел, никакое из них не делится на другие. Докажите, что их сумма не меньше n^2.

ПН4. Существует ли такое натуральное n, что 2^n начинается на 5, а 5^n начинается на 2?