

Неоднозначные данные, или Доказательство без разглашения

«А это вам знать пока рано», – сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!». Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников всё-таки увидели то, что знать пока рано?

Неразличимые примеры

Чтобы доказать, что информации недостаточно для получения однозначного ответа, можно построить два примера, которые удовлетворяют всем условиям, но дают разные ответы.

- а) Клетки доски 7×7 покрашены в красный, синий и черный цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×3 встречаются все три цвета. Левая нижняя клетка – красная. Можно ли наверняка узнать цвет правой верхней клетки?
- б) Тот же вопрос про доску 8×8 ?
2. У Кашея есть корона, по кругу которой вставлено 10 одинаковых с виду алмазов. Известны веса этих алмазов: 11 карат, 12 карат, ..., 20 карат. Кашей предлагает Ивану Царевичу такую игру: он сообщает Ивану сумму весов каждой пары соседних алмазов и сумму весов каждой пары противоположных алмазов. Если после этого Иван правильно назовет, куда какой по весу алмаз вставлен, то получит корону вместе с алмазами, а если хотя бы в одном месте ошибется, то распрошасется с головой. Стоит ли Ивану соглашаться играть?
3. а) Незнайка утверждает, что он может узнать с помощью чашечных весов без гирь есть ли среди любых 3 фруктов такой, вес которого равен $1/3$ общего веса. Не хвастает ли он?
- б) А узнать, есть ли среди 10 фруктов фрукт веса $1/7$ от общего веса?
- 4*. Все зарегистрированные абоненты одной страны были занумерованы подряд натуральными числами от 2 до 20000000 (числа идут без пропусков и повторений). Для каждой пары абонентов запомнили наибольший общий делитель их номеров, а сами номера были забыты (в результате хакерской атаки). Можно ли для каждого абонента восстановить его номер?

Примеры «задним числом»

Неразличимые примеры и контрпримеры могут строиться после того, как испытания уже проведены и ответы даны, с использованием уже полученной информации. Этот метод часто применяется, чтобы опровергнуть предположение о наличии «гарантированного» алгоритма.

5. а) Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Все жители деревни встали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли тот. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы. Определите и вы, чему она равна.
- б) По кругу стоят 12 корзин с яблоками, одна из них красная. Известно, что в красной корзине 100 яблок, и для каждой пары соседних корзин известна разность между ними (из большей вычитают меньшую). Докажите, что если все разности – ненулевые однозначные числа, то по этим данным нельзя точно узнать число яблок в корзине справа от красной.
6. На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P . Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Нужно определить, лежит ли точка P внутри квадрата. Можно ли это наверняка узнать а) за два вопроса? б) за три вопроса?

Доказательство без разглашения

7. Суду предъявлен набор из 100 одинаковых с виду монет. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Задача адвоката: показать суду, сколько есть фальшивых монет, не разгласив ни про какую монету, фальшивая она или настоящая. (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)
 - а) Суд уже установил, что фальшивых монет 3 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?
 - б) Суд уже установил, что фальшивых монет 0 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?
 - в) Суд уже установил, что фальшивых монет 0 или 2. Может ли адвокат, не нарушая обязательств, показать, что их ровно 2?

Зачётные задачи

- НД1.** В колоде 52 карты (4 масти, 13 достоинств). Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Всегда ли по этой информации можно узнать пару крайних карт колоды?
- НД2.** а) В клетки доски 8×8 записали числа $1, 2, \dots, 64$ в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в любой паре клеток с общей стороной. Всегда ли можно узнать расположение всех чисел? б) То же для доски 9×9 с числами от 1 до 81.
- НД3.** В условиях задачи 7:
- Суд уже установил, что фальшивых монет 2 или 3. Как адвокату показать, что их ровно 3?
- НД4.** У N ключей от N гостиничных номеров потерялись бирки. Известно, что каждый ключ открывает ровно один из номеров. Какое наименьшее число пробных открываний дверей надо сделать, чтобы наверняка определить, от какого номера каждый ключ?