Чередование цветов и подсчеты

1. а) Хромая ладья стартовала из левого нижнего поля доски 11x11 и сделала 111 ходов. Могла ли она оказаться на центральном поле доски?
б) А в центре доски 111x111 после 88 ходов?
2. а) Хромая ладья стартовала из левого нижнего поля доски 11x11 и закончила на правом верхнем поле. Могла ли она побывать на каждом поле доски ровно по одному разу?
б) Тот же вопрос для доски 12x12.
3. Шахматный конь стартует с левого нижнего поля доски.
а) За какое наименьшее число ходов он может на доске 100x100 дойти до правого верхнего поля?
б) А на доске 50x50?
в) А на доске 100x100 до правого нижнего поля?

Чередование и обходы

4. Может ли конь обойти шахматную доску 11×11 так, чтобы побывать на каждом поле ровно по одному разу и вернуться последним ходом на исходное поле?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

5. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны числа от 1 до 10 (см. рис). Юля прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок – на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Юля была 1 раз, на клетке 2 – 2 раза, ..., на клетке 9 – 9 раз. Сколько раз побывала Юля на клетке 10?
Теорема 6. Пусть на пути строго чередуются черные и белые поля (или вершины). Докажите, что
а) На любом замкнутом обходе число ходов на черные поля равно числу ходов на белые поля;
б) На любом замкнутом обходе число ходов чётно;
в) На любом незамкнутом пути число ходов на белые поля равно числу ходов на черные поля или отличается от него на 1.
7. Из клетчатой доски 11x11 выбросили 4 угловых поля. Какое наибольшее число полей может обойти хромая ладья, не ступая ни на какое поле повторно?

Раскраска в два цвета

Определение. Многоугольник (или поверхность), разбитый на меньшие многоугольные части-*страны*, назовем *картой*. Пусть каждая страна покрашена в один цвет. Раскраска называется *правильной*, если страны с общим отрезком границы покрашены в разные цвета.
8. Какие из карт можно правильно раскрасить в два цвета:
а) Выпуклый пятиугольник, в котором проведены все диагонали; **б)** Поверхность кубика Рубика 3x3x3;
в) Правильный треугольник 10x10, разбитый прямыми, параллельными сторонам, на правильные треугольнички со стороной 1; **г)** Шахматная доска, где в каждая клетка разбита двумя диагоналями на 4 треугольника?
Определение. Граф, где каждая вершина имеет цвет, покрашен *правильно*, если концы каждого ребра – разного цвета.
9. Для каждой из карт в задаче 8 рассмотрим граф, где вершины – вершины стран, рёбра – стороны стран. Какие из эти графов можно покрасить правильно?
10. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

Зачётные задачи

ЧЦ1. На поверхности кубика Рубика отмечены вершины всех клеток, а также проведены обе диагонали в каждой клетке и отмечены точки пересечения диагоналей. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?
ЧЦ2. На клетчатой доске NxN минимальное число ходов коня от левого нижнего поля до правого нижнего равно минимальному числу ходов от левого нижнего до правого верхнего поля. Найдите N.
ЧЦ3. Можно ли расставить в вершинах куба натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел, связанных ребром, одно из них делилось на другое, а во всех других парах такого не было?
ЧЦ4. Назовем *крокодилом* шахматную фигуру, ход которой заключается в прыжке на m клеток по вертикали или по горизонтали и затем на n клеток в перпендикулярном направлении. Докажите, что для любых m и n можно так раскрасить любую клетчатую доску в два цвета (для каждых конкретных m и n своя раскраска), что любые две клетки, соединенные одним ходом крокодила, будут покрашены в разные цвета.

Малый мехмат, 7 класс, гр.2, 3 июля 2018 г, http://www.ashap.info/Uroki/Bolgar2/2018/7-2/index.html