

Инвариант шаг за шагом

Идёт процесс, ситуация с каждым шагом меняется, а мы хотим знать, что будет в конце. Результат предсказать легче, если хоть что-то постоянно. Неизменное свойство называют *инвариантом*. Если мы проверили, что свойство не меняется на каждом шаге, то свойство не меняется вообще. Точнее говоря, это свойство одинаково для начальной точки процесса и для всех точек, до которых есть цепочка шагов из из начальной точки. Типичные инварианты: количество чего-то, общая сумма, общее произведение, четность, делимость на что-то, остаток.

1. Каждым ходом компьютер выписывает на экране ещё одно число, которое больше предыдущего либо на сумму двух последних цифр (если эта сумма цифр делится на 8), либо на 20 (если она на 8 не делится). Вначале на экране было только число 22.

- а)** Выписано 2018 чисел. Есть ли среди них шестизначные?
- б)** Выписано 1000000 чисел. Есть ли среди них число 444444?

2. В трёх кучках 5, 8 и 18 камней. За одну операцию можно в одну кучку добавить один камень, а в другую – 5 камней.

- а)** Можно ли добиться, чтобы каждые две кучки отличались не больше чем на 1 камень?
- б)** Можно ли добиться, чтобы все кучки были равны?

Инвариант полезно поискать в любой задаче, где есть процесс. Числовую оценку в задаче можно получить, обнаружив *числовой* инвариант и связав его с этой оценкой.

3. Гулливер попал в страну лилипутов, имея 7000 рублей. Из осторожности он собирается питаться только кефиром. В день приезда кефир стоил 7 рублей за бутылку (при этом пустая бутылка стоила 1 рубль). Гулливер знает, что из-за инфляции каждый день цена кефира и бутылки вырастает вдвое. Он сам решает, когда пить кефир, когда сдавать бутылки и когда на вырученные деньги покупать новый кефир (других доходов у Гулливера не предвидится). Какое наибольшее количество бутылок кефира сможет выпить Гулливер?

4. Изначально на доске написаны числа 20, 30, 40, 50. Разрешается выбрать любое число, уменьшить его в целое число раз (но так, чтобы оно осталось целым), а одно из других чисел увеличить в такое же целое число раз (например, 50 и 20 заменить на $50:5=10$ и $20\cdot5=100$). Какое самое большое число может встретиться среди написанных?

Часто процесс ветвится: на каждом шаге есть выбор. Схема процесса похожа на дерево. Но в конец каждой веточки из основания тянется цепочка. И инвариант по цепочке распространится в каждую точку процесса. Кроме чисел и остатков бывают ещё *инвариантные свойства*, например совпадение чисел, их неравенство, присутствие особого элемента или группы.

5. Картонный треугольник разрезали по прямой на две части. Затем каждый раз выбирали одну из всех частей и разрезали её по прямой на две части. Получилось более ста частей.

- а)** Докажите, что хотя бы одна из частей – треугольник.
- б)** Среди частей ровно один треугольник. Что можно сказать о других частях?

6. На экране компьютера число 76543210. Каждую секунду робот уменьшает его на его сумму цифр. Докажите, что рано или поздно получится число 9.

7. а) Волк и семеро козлят встали в один ряд и играют в чехарду: каждую секунду двое из них, стоящие через одного, могут, прыгнув, поменяться местами. Игра закончится, если они встанут в обратном порядке по сравнению с исходным. Могут ли они закончить, не нарушая правил?

Инвариант шаг за шагом: Зачетные задачи

76) То же, но козлята друг с другом меняются через одного, а волк меняется со стоящим рядом.

ИШ1. Изначально на доске написаны числа 20, 30, 40, 50. Разрешается выбрать любое число, уменьшить его в простое число раз (но так, чтобы оно осталось целым), а одно из других чисел увеличить в другое простое число раз (например, 50 и 20 заменить на $50:5=10$ и $20\cdot7=140$). Можно ли такими операциями получить набор чисел 30, 40, 50, 60?

ИШ2. Петя вынимает из мешка чёрные и красные карточки и складывает их в две стопки. Класть карточку на другую карточку того же цвета запрещено. Десятая и одиннадцатая карточки, выложенные Петей, – красные, а двадцать пятая – чёрная. Какого цвета двадцать шестая выложенная карточка?

ИШ3. На столе лежат 40 красных, 40 синих и 40 зелёных фишек. Можно снять со стола две фишки разного цвета и вместо них выложить фишку третьего цвета. Какое наименьшее количество фишек можно оставить на доске?

ИШ4*. На прямой отмечены две точки: слева красная, справа синяя. Разрешается добавлять или стирать пару красных или пару синих отмеченных точек, если между ними нет других отмеченных точек. Докажите, что невозможно добиться, чтобы остались две отмеченные точки, но слева – синяя, а справа – красная.

Малый мехмат, 7 класс, гр.2, 2 июля 2018 г, <http://www.ashap.info/Uroki/Bolgar2/2018/7-2/index.html>